

ОСЦИЛАЦИЈЕ ХИБРИДНИХ СИСТЕМА РАЦИОНАЛНОГ РЕДА

Катица Р. (Стевановић) Хедрих

Машински факултет Универзитета у Нишу
Математички институт САНУ
Тел: 381 18 2 41 663;

E-mail: katica@masfak.ni.ac.yu, khedrih@eunet.yu, khedrih@sbb.co.yu

Сажетак: У раду су представљена партикуларна решења система обичних фракционог (рационалног) реда диференцијалних једначина, као и модови осциловања пузећих својстава динамике хибридних система. Начињена је и анализа својстава тих модова осциловања. Користећи партикуларна решења и модове осциловања, пузећих својстава, изучавана је осцилаторна динамика серија инжењерских динамичких система и сами пузећи модови осциловања различитих базних фреквенција. Главни резултати истраживања представљени у овом раду су аналитички изрази модова фракционог (рационалног) реда као и осциловања хибридних система са коначним бројем степени слободне осциловања, као и хибридних система који садрже подсистеме деформабилних тела спрегнутих слојем расподељених стандардних лаких елемената пузећих својстава рационалног реда. То је показано на примеру два мода сопствених функција времена, који су чисто периодични, и одговарајућем броју модова функција времена који су "пузећи модови" у резултату својстава еластичности и/или пузања деформабилних тела и/или расподељених елемената у слојевима спрезања. Показан је и утицај пузећих својстава елемената хибридног система на фреквенције модова осциловања система.

Динамика механичких хомогених ланаца, као што су сендвич системи вишег реда, више плоча и више клатна спрегнутих у хибридни систем, је изучавана коришћењем математичке аналогије и феноменолошког пресликавања.

Кључне речи: Хибридни систем, спрегнути подсистеми, спрегнуте динамике, деформабилна тела, стандардни лаки пузећи елемент, извод рационалног реда, временски модови, аналитички израз, Laplace'ова трансформација, мод пузећих својстава, нормални реолинеарни мод.

1 УВОД

Интерес за истраживања својстава динамике спрегнутих подсистема у хибридне системе, као квалитативно нове, експоненцијално расте последњих година, посебно у теоријским и квалитативним доменима.

Ради увода у ова истраживања даје се преглед ауторових истраживања динамике хибридних система различитих врста и типова, као и аналитичких резултата аутора из области аналитичке динамике дискретних система са наследним својствима (коауторски са О.А. Горошком), као и динамике дискретних система са пузећим својствима приказаним помоћу извода нецелог реда и публикованих и приказаних у приложеном списку литературе.

Механика наследних средина (материјала) је приказана у научној литератури значајним монографијама следећих научника: Работнова (Rabotnov, Yu.N.) [80], Ржањицина (Rzhanitsin, A.R.) [81], Савина и Рушћизског (Savin G. N., Ruschisky Yu. Ya) [82]. Нова Аналитичка механика дискретних наследних система аутора О.А. Горошка и К. (Стевановић) Хедрих приказана је у монографији [8] и научним чланцима [9-12]. Евидентно је да се створена знања Механике наследних материјала и Аналитичке механике дискретних наследних система широко примењују у анализи динамике инжењерских система, али исто тако и у биомеханици и другим областима наука. Користе се и за пројектовање и конструисање различитих типова и својстава материјала приказивањем истих различитим конститутивним релацијама и материјалним константама. Помоћу тих нових модела и хибридних структура описаних аналитичким изразима и једначинама, као и одговарајућим решењима откривени су и описани нови физички феномени динамике таквих система.

Те области механике су интензивно развијане, а свој успон су добиле кроз истраживања и монографије [80-82] које смо већ цитирали. Развој тих области механике је снажно подржан инжењерском праксом и појавом нових пројектованих и конструисаних материјала на синтетичкој основи, и коришћењем аналитичких израза за конститутивне релације везе напона и деформација са својствима пузања и реолошког карактера. Данас, са скале поређења обима употреба метала и тих нових материјала видимо да се употреба тих нових материјала снажно увећава и обим је упоредив са оним за метале. Новоконструисани метаријали, на основу унапред задатих конститутивних релација између стања напона и стања деформација, као и спрегнутих поља, поседују програмирана својства као што су: диелектрична својства, радиопроводљивост, транспарентност, високи степен деформабилности, и по правилу мале тежине, што их чини веома применљивим и незаменљивим у разним областима конструкција људске праксе. Технологији производње таквих материјала свакако су дала допринос и нова знања из области хемије.

Универзитетски уџбеник [78] Данила П. Рашковића садржи класичну теорију лонгитудиналних и трансверзалних осцилација хомогених призматичних штапова и греда, и у [73] математичку теорију одговарајућих парцијалних диференцијалних једначина. Чланак [3] R.E.D Bishop-а садржи неке резултате истраживања лонгитудиналних таласа у гредама.

У два рада [64, 65] аутора К. (Стевановић) Хедрих и А. Филиповског приказани су резултати истраживања нелинеарних реолинерних лонгитудиналних осцилација штапова променљивог попречног пресека, који имају примене у инжењерским системима, као што су ултразвучни концентратори, појачивачи и побуђивачи. Ти радови садрже теоријске основе изучавања осцилација таквих система.

Задаци трансверзалних осцилација греда су у основи класични, али савремени универзитетски уџбеници теорије осцилација не садрже нове неklasичне и нелинеарне моделе, већ садрже само Euler-Bernoulli-јеву класичну линеарну парцијалну диференцијалну једначину трансверзалних осцилација греда.

Као изузетак, у универзитетском уџбенику [78] од Данила П. Рашковића, још из 1952 године, парцијална диференцијална једначина трансверзалних осцилација греде, је проширена, у односу на Euler-Bernoulli-јеву класичну линеарну парцијалну диференцијалну једначину трансверзалних осцилација греда, члановима који узимају у обзир инерцију обртања попречних пресека греде, као и смицање попречних пресека изазвано дејством трансверзалних сила у попречним пресецима са пратећим аналитичким решењем и нумеричким примерима.

У неким референцама, као што је [85] можемо наћи моделе трансверзалних осцилација греда од материјала чија је конститутивна релација својстава еластичности материјала нелинеарна. Такође се у радовима јављају и модели осциловања греда од реолошких материјала [3].

Два рада [15,16] К. (Стевановић) Хедрих приказују резултате истраживања трансверзалних осцилација призматичних греда од наследног материјала. Серија радова [4,5, 6, 15, 18, 19 27 45, 48, 51, 58] истог аутора садржи нове резултате истраживања трансверзалних осцилација призматичних греда од наследног, односно материјала са својствима пузања, а чије су конститутивне релације изражене изводима нецелог реда.

Публиковани радови [14, 16, 21, 23, 24, 26, 30, 35, 41, 44, 45, 46, 50, 52, 53, 54-55, 61-64] садрже моделе динамике дискретних механичких система као и примере примене методе дискретног континуума [42] са лаким стандардним наследним елементима, а исто тако и са лаким стандардним пузећим елементима конститутивних релација које се изражавају помоћу интегралних веза, односно помоћу извода фракталног реда [34]. Стандардни лаки наследни елемент као веза у систему дискретних материјалних тачака уноси наследна својства у динамику таквих система. Карактеристични реолинеарни модови са својствима пузања су аналитички описани помоћу редова.

Референце [21, 42, 45] садрже моделе дискретног континуума са међувезама материјалних тачака у виду лаких стандардних наследних елемената, на бази конститутивних релација изражених помоћу интегралних чланова, као и у виду лаких стандардних пузећих елемената на бази конститутивних релација изражених помоћу извода нецелог (фракционог) реда.

Као што смо већ назначили, интегрална теорија аналитичке динамике дискретних наследних система је представљена у монографији [8], а њена примена у серији публикованих радова.

У монографији [7] дате су основе математичке теорије обичних нецелог реда диференцијалних једначина које су примењиване за изучавање динамике система са пузећим својствима.

У радовима [15] и [16] приказани су резултати изучавања трансверзалних осцилација греда од наследног материјала и стохастичка стабилност деформабилних облика динамике греде који одговарају n -том облику еластичне форме греде.

У раду [1] Ariaratnam S. T. је приказао своје резултате истраживања вискоеластичног система у условима стохастичких побуда. Рад [51] приказује примену идеје Ariaratnam-а, из претходног рада, на изучавање трансверзалних осцилација параметарски побуђене греде случајном силом, а у условима узимања у обзир утицаја

инерције обртања и смицања попречних пресека под дејством трансверзалних сила. Изучена је и стохастичка стабилност деформабилних форми греде и динамички побуђених модова и одређени одговарајући Јапуновљеви експоненти. Асимптотска метода усредњења, чије су теоријске основе приказабе у монографијама [72-77] Ју. А. Митропољског, је примењена за добијање дела резултата приказаних у том раду. Монографије [72-77] Ју. А. Митропољског садрже и асимптотску методу за примену на моделе за изучавање нестационарних нелинеарних осцилација.

Универзитетски уџбеници [78,79] Данила П. Рашковића садрже класичну теорију напрезања и осцилација струна, греда, плоча и љуски. У једном броју монографија можемо наћи МКЕ као ефикасну нумеричку методу за изучавање конкретних задатака, осцилација деформабилних тела, али недовољну за аналитичко и квантитативно описивање специфичности феномена нелинеарних осцилација.

У последњем периоду од десетак година, модели конститутивних релација које описују стање напона и стање деформација материјала плоче са реолошким својствима су примењивани за изучавање трансверзалних осцилација греда, а један број тих резултата је представљен у серији чланака [20, 12, 23, 27-20, 31, 34, 37, 47, 57, 60, 57, 70]. У једном броју тих радова приказани су резултати К. (Стевановић) Хедрих, који се односе на трансверзалне осцилације система више плоча, система више аксијално покретних појасева, као и система више греда, спрегнутих слојевима, састављеним од расподељених лаких стандардних елемената са својствима еластичности, вискоеластичности, наследним и пузећим својствима.

Неки почетни резултати постављања и коришћења конститутивних релација за описивање пузећих својстава материјала плоче и постављања парцијалне фракционог (не целог реда) диференцијалне једначине квазистатичког и динамичког понашања савијене плоче представљени су на ESMC Thessaloniki 2003, да би део истих био публикован у референци [34]. Претпостављено је да је материјал плоче са пузећим својствима и одговарајуће конститутивне релације везе између напона и деформација су изражене помоћу извода нецелог реда. Изведена парцијална фракционог реда диференцијална једначина трансверзалног угиба средње површи плоче је решена. Трансверзална померања тачака средње површи плоче одређена су помоћу Бернулијеве (Bernoulli) методе партикуларних интеграла и Лапласеове (Laplace) трансформације, као и развијањем у степене редове по комплексној променљивој добијених Лапласеових (Laplace) трансформација решења и одређивањем инверзне Лапласеове трансформације.

За случај сопствених осцилација плоче за сваки од модова добијене су одговарајуће обичне нецелог реда парцијалне диференцијалне једначине облика $\ddot{\mathbf{T}}(t) + \{\omega_{0mn}^2 + \omega_{cmn}^2 \mathfrak{S}_t^\alpha\} [\mathbf{T}(t)] = 0$, које нису биле спрегнуте са другим које одговарају другим модовима. Коришћењем аналитичких израза за добијене функције времена, помоћу MathCad програма нацртане су површи $\mathbf{T}_{mn}(t, \omega_{0mn}, \omega_{cmn}, \alpha)$ и добијене одговарајуће визуелизације модова осциловања са којих се види утицај пузећих својстава материјала плоче.

У овом прегледном раду су приказани поједини резултати из ауторових публикованих радова који представљају резултате истраживања осциловања штапова, греда и плоче од материјала са пузећим својствима, а чије се конститутивне релације изражавају изводима нецелог реда, а одговарајуће парцијалне диференцијалне једначине после примене Бернулијеве методе партикуларних интеграла своде на исте типове

обичних фракционог (нецелог) реда дифференцијалних једначина.

Такође је дат и један број нових резултата осциловања хибридних система састављених од висе плоча и дата одговарајуће решења која описују својства осциловања таквих хибридних система нецелог реда.

2 МОДЕЛ РЕОЛОШКОГ ТЕЛА СА ПУЗЕЊИМ СВОЈСТВИМА.

Користећи конститутивну релацију напон деформација приказаних у публикованим референцама [6, 7, 65, 66], за случај једноосног аксијалног напрезања и напонског стања за материјал са својствима пузања која се изражавају помоћу извода нецелог реда, постављамо везу између нормалног напона и релативне деформације у облику диференцијалне везе рационалног реда.

Користећи конститутивну релацију напон деформација приказаних у публикованим референцама [6, 7, 65, 66], за случај једноосног аксијалног напрезања и напонског стања за материјал са својствима пузања која се изражавају помоћу извода нецелог реда, постављамо везу између нормалног напона и релативне деформације у облику диференцијалне везе рационалног реда:

$$\sigma(t) = -\{E_0 \varepsilon(t) + E_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha [\varepsilon(t)]\} \quad (1)$$

у којој је $\sigma(t)$ нормални напон у попречном пресеку напрегнутог елемента, $\varepsilon(t)$ дилатација линијског елемента у правцу напрезања и деформације, E_0 и E_α модули еластичности редом при тренутном, односно дуготрајном оптерећивању, док је $\mathfrak{D}_t^\alpha [\bullet]$ оператор рационалног реда диференцирања – рационалног α^{th} -тог реда извода по времену t , а примењен на $\varepsilon(t)$ дилатацију линијског елемента даје следећи израз:

$$\mathfrak{D}_t^\alpha [\varepsilon(t)] = \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha} = \varepsilon^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\varepsilon(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (2)$$

У претходном изразу α је реалан параметар који карактерисе својства пужења и релаксације материјала елемента и одређује рационални (фрактални) ред извода у конститутивној релацији напон-деформација и утврђује се експериментално, а налази се у границама $0 < \alpha < 1$, док је $\Gamma(1-\alpha)$ Euler-ова гама функција. Претпоставићемо такође да релација (1) односно (2) важи у интервалу времена $t \geq 0$, занемарујући предисторију и памћење оптерећења материјала елемента.

2. 1* Једначина лонгитудиналних осцилација са својствима пузања реолошког штапа променљивог попречног пресека.

Размотримо деформабилни штап, од материјала конститутивне релације напон деформација описане изразом који садржи изод рационалног реда, са променљивим попречним пресеком и тежиштима на једној правој.

Слика 1. представља елемент штапа, попречног пресека $A(z)$, елементарне дужине dz , у правцу осе z штапа. Нормална на попречни пресек, аксијална сила $N(z, t)$ у правцу

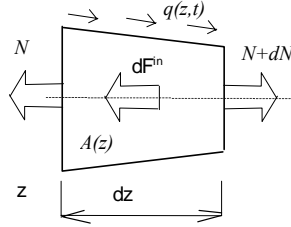
осе z штапа једнака је производу нормалног напона $\sigma(z, t)$ и површине попречног пресека $A(z)$:

$$N(z, t) = A(z)\sigma_z(z, t) \quad (2)$$

док је нормална сила $N(z + dz, t)$ у попречном пресеку помереном за dz од претходног на координати $z + dz$:

$$N(z + dz, t) = A(z)\sigma_z(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} [A(z)\sigma_z(z, t)]dz \quad (4)$$

где је t време, а $\sigma_z(z, t)$ нормални напон у тачкама попречног пресека под претпоставком да при лонгитудиналним осцилацијама нема депланације попречног пресека и да су у свим тачкама једног попречног пресека исти нормални напони. Лонгитудинална померања тачака попречног пресека означимо са $w(z, t)$ и претпоставимо да су иста за све тачке истог пресека.



Слика 1. Елемент штапа елементарне дужине dz

Применом принципа динамичке равнотеже (D'Alembert) на елемент штапа елементарне дужине са слике 1. можемо да напишемо следећи једначину:

$$\frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho A(z)} \frac{\partial}{\partial z} [A(z)\sigma_z(z, t)] = \frac{1}{\rho} q(z, t) \quad (5)$$

где ρ специфична густина материјала греде, $q(z, t)$ специфична, расподељена по запремини греде, масена сила.

Претпоставили смо да је материјал греде са својствима пузања то је конститутивна релација напон - деформација облика (1). Како се дилатација линијског елемента у правцу осе штапа изражена преко лонгитудиналног померања $w(z, t)$ попречног пресека може написати у облику $\varepsilon_z(z, t) = \frac{\partial w(z, t)}{\partial z}$, онда се веза нормални напон $\sigma(z, t)$ и лонгитудинално померање попречних пресека $w(z, t)$ за посматрани штап може написати у облику:

$$\sigma_z(z, t) = E_0 \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} + E_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \right] \quad (6)$$

Уношењем претходног израза (6) са изводом нецелог реда по времену, у једначину

динамичке равнотеже (5) елемента штапа, при чему уводимо и ознаке $c_0^2 = \frac{E_0}{\rho}$ и $c_\alpha^2 = \frac{E_\alpha}{\rho}$ добијамо следећу парцијалну рационалног реда диференцијалну једначину лонгитудиналних осцилација штапа променљивог попречног пресека $A(z)$ за случај принудне динамике у лонгитудиналном правцу, у следећем облику:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{A(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[A(z) \frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \right] = \frac{c_\alpha^2}{c_0^2} \frac{1}{A(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[A(z) \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \right] \right] + \frac{1}{E} q(z,t) \quad (7)$$

2. 2* Слободне лонгитудиналне осцилације са својствима пузања реолошког штапа променљивог попречног пресека.

За случај слободних лонгитудиналних осцилација штапа променљивог попречног пресека из изведене једначине (7) можемо да напишемо следећу парцијалну рационалног реда диференцијалну једначину:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{A(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[A(z) \frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \right] = \frac{c_\alpha^2}{c_0^2} \frac{1}{A(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[A(z) \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \right] \right] \quad (8)$$

За решење претходне парцијалне рационалног реда диференцијалне једначине прво примењујемо Бернулијеву (Bernoulli) методу партикуларних интеграла у облику производа двеју функција, једне $Z(z)$ функције координате z и друге $T(t)$ функције времена t у облику:

$$w(z, t) = Z(z)T(t) \quad (9)$$

Претпостављено решење (9) уносимо у парцијалну рационалног реда диференцијалну једначину (8) и уведемо ознаку $\omega_0^2 = k^2 c_0^2$, па исту можемо раздвојити на две, од којих је једна обична диференцијална једначина, друга обична фракционог реда диференцијална једначина и то и следећем облика.

* прва је обична диференцијална једначина другог реда са променљивим коефицијентима и по непознатим сопственим амплитудним функцијама $Z(z)$ које зависе од координате z , а облика је:

$$Z''(z) + \frac{A'(z)}{A(z)} Z'(z) + k^2 Z(z) = 0 \quad (10)$$

и

* друга је обична диференцијална једначина фракционог (рационалног) реда по сопственим функцијама $T(t)$, које зависе од времена t , а облика је:

$$\ddot{T}(t) + \omega_\alpha^2 \mathfrak{D}_t^\alpha [T(t)] + \omega_0^2 T(t) = 0 \quad (11)$$

Обе претходне диференцијалне једначине раздвајају променљиве и могу се решити независно једна од друге, а спрегнуте су само карактеристичним бројем, односно фреквенцијом $\omega_0^2 = k^2 c_0^2$.

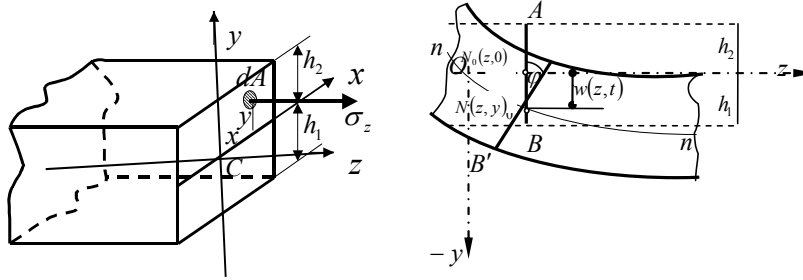
Прва обична диференцијална једначина другог реда са променљивим коефицијентима (10) се може решити по непознатим сопственим амплитудним функцијама $Z(z)$, које зависе од координате z , за неколико случајева познатих попречних пресека

$A(z)$ штапа, као штп је то дато у радовима [4, 6, 7, 65, 66].

3 ТРАНСВЕРЗАЛНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ХОМОГЕНЕ ГРЕДЕ ОД МАТЕРИЈАЛА СА ПУЗЕЊИМ СВОЈСТВИМА КУНСТИТУТИВНЕ РЕЛАЦИЈЕ ОПИСАНЕ ИЗВОДИМА НЕЦЕЛОГ РЕДА.

За линијски елемент призматичне греде, константног попречног пресека, од материјала пузењих својстава, усвајамо модел конститутивне релације облика (1), па нормални напон $\sigma_z(z, y, t)$ у тачкама попречног пресека, слика 2., чији је положај одређен координатом z , мереном од левог краја дужне деформисане осе греде, можемо изразити углом $\varphi(z, t)$ обртања попречног пресека при трансверзалном угибу греде.

Дилатација линиског елемента греде је $\varepsilon_z(z, y, t) = y \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z}$, као што је то урађено у раду [69].



Слика 2. Нормални напон у тачкама попречног пресека греде.

Конститутивна релација између момента савијања $\mathfrak{M}_f(z, t)$ и угла $\varphi(z, t)$ обртања попречног пресека при трансверзалном угибу греде добијамо на основу конститутивне релације (1) уношењем израза за дилатацију $\varepsilon_z(z, y, t) = y \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z}$ и интегралнењем по координати y управно на осу савијања греде тако да добијамо следећи израз:

$$\mathfrak{M}_f(z, t) = \left\{ \mathfrak{B}_{0x} \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} + \mathfrak{B}_{\alpha x} \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right] \right\} \quad (12)$$

у коме су уведене ознаке $\mathfrak{B}_{0x} = E_0 I_x$ савојна крутост греде и $\mathfrak{B}_{\alpha x} = E_\alpha I_x$, "фрактална" савојна крутост греде која укључује својства пузања метеријала преко модула елстичности дуготрајног оптерећивања материјала греде.

Трансверзална померања тачака деформабилне неутралне линије греде означимо са $v(z, t)$. Израз за трансверзалну силу у попречном пресеку греде усвојимо у облику, као и у референцама [79, 80, 69]. Примењујући принцип динамичке равнотеже за трансверзални правац и динамичку равнотежу момната добијамо две спрегнуте једначине, из којих

елиминисањем угла $\varphi(z, t)$ обртања попречног пресека при трансверзалном угибу греде добијамо парцијалну фракционог реда диференцијалну једначину изражену само преко трансверзалног угиба $v(z, t)$ у следећем облику:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial^2} + \left\{ c_{0x}^2 \frac{\partial^4 v(z, t)}{\partial z^4} + c_{\alpha\alpha}^2 \mathfrak{B}_t^\alpha \left[\frac{\partial^4 v(z, \tau)}{\partial z^4} \right] \right\} - \\ & - i_x^2 \kappa \frac{1}{G} \left[E_0 \frac{\partial^4 v(z, t)}{\partial^2 \partial z^2} + E_\alpha \mathfrak{B}_t^\alpha \left[\frac{\partial^4 v(z, t)}{\partial^2 \partial z^2} \right] \right] + \\ & + i_x^2 \kappa \frac{E_0}{G} \frac{\partial^4 v(z, t)}{\partial^4} - i_x^2 \frac{\partial^4 v(z, \tau)}{\partial z^2 \partial^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[F'_N(\Xi, z, t) \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

при чему смо увели следеће ознаке:

$$\begin{aligned} c_{0x}^2 &= \frac{\mathfrak{B}_{0x}}{\rho A}; \quad c_{\alpha\alpha}^2 = \frac{\mathfrak{B}_{\alpha\alpha}}{\rho A}; \quad \frac{\mathfrak{B}_{0x} \rho \kappa}{\rho A G} = \kappa i_x^2 \frac{E_0}{G}; \\ \frac{\mathfrak{B}_{\alpha\alpha} \rho \kappa}{\rho A G} &= \kappa i_x^2 \frac{E_\alpha}{G}; \quad F'_N(\Xi, z, t) = \frac{1}{\rho A} F_N(\Xi, z, t) \end{aligned} \quad (14)$$

Новоизведена парцијална фракционог реда диференцијална једначина (13) је проширена у поређењу са класичном члановима који садрже диференцијални оператор нецелог реда диференцирања, који се појављују као последица увођења особина пузања материјала греде. Једначина обухвата и чланове којима се узима у обзир инерција обртања попречних пресека и смицање услед дејства трансверзалних сила, као и дејство спољашње аксијалне силе $F_N(\Xi, z, t)$.

Посматраћемо мање општи случај, када не дејствује спољашња аксијална сила и када се утицај смицања услед дејства трансверзалне силе занемарује. У том случају из парцијалне рационалног реда диференцијалне једначине (13) добијамо следећу поједностављену парцијалну рационалног реда диференцијалну једначину:

$$\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial^2} + \left\{ c_{0x}^2 \frac{\partial^4 v(z, t)}{\partial z^4} + c_{\alpha\alpha}^2 \mathfrak{B}_t^\alpha \left[\frac{\partial^4 v(z, \tau)}{\partial z^4} \right] \right\} - i_x^2 \frac{\partial^4 v(z, \tau)}{\partial z^2 \partial^2} = 0 \quad (13^*)$$

За решење претходне парцијалне рационалног реда диференцијалне једначине (13*) прво примењујемо Бернулијеву (Bernoulli) методу партикуларних интеграла у облику производа двеју функција, једне $Z(z)$ функције координате z и друге $T(t)$ функције времена t у облику:

$$v(z, t) = Z(z) \Gamma(t) \quad (14)$$

Затим, претпостављено решење (14) уносимо у парцијалну рационалног реда диференцијалну једначину (13*) и уведемо ознаке $\omega_{0x} = k^2 c_{0x} = k^2 \sqrt{\frac{\mathfrak{B}_{0x}}{\rho A}}$ и

$\omega_{\alpha\alpha} = k^2 c_{\alpha\alpha} = k^2 \sqrt{\frac{\mathfrak{B}_{\alpha\alpha}}{\rho A}}$, па исту можемо раздвојити на две, од којих је једна обична

диференцијална једначина другог реда са променљивим коефицијентима и по непознатим сопственим амплитудним функцијама $Z(z)$ које зависе од координате z , а друга обична фракционог реда диференцијална једначина по сопственим функцијама $T(t)$, које зависе од времена t , и то и следећем облику:

$$Z^{IV}(z) + i_x^2 k^4 Z''(z) - k^4 Z(z) = 0 \quad \ddot{T}(t) + \omega_{\alpha x}^2 \mathfrak{D}_t^\alpha [T(t)] + \omega_{0x}^2 T(t) = 0 \quad (15)$$

Видимо да је друга обична диференцијална једначина фракционог (рационалног) реда по сопственим функцијама $T(t)$, које зависе од времена t , (15) истог облика као и одговарајућа (11) добијена за случај лонгитудиналних осцилација штапа. Видимо да својства пузања материјала утичу на функцију времена.

3. 1* Трансверзалне осцилације нехомогене греде од материјала са пузећим својствима конститутивне релације описане изводима нецелог реда.

Разморићемо случај када је греда састављена од два слоја различитих материјалних параметара еластичности и пузања.

Зато размотримо један слој и напон у том слоју од материјала са пузећим својствима, чији су параметри: α сопствена константа материјала која карактерише особину пузања материјала, E_0 и E_α су модли еластичности материјала за случај тренутног и дуготрајног оптерећивања материјала.

Користимо конститутивну релацију (1) напон-деформација у материјалу за случај аксијалног напрезања линијског елемента материјала са особинама пузања која је описана члановима који садрже изводе рационалног реда α . На основу тога, за линијски елемент греде од материјала са особиним пузања, нормални напон $\sigma_z(z, y, t)$ у тачкама попречног пресека греде на удаљењу y од неутралне осе савијања и у функцији угла обртања $\varphi(z, t)$ одговарајућег попречног пресека при савијању греде, т.ј. конститутивну релацију напон деформација можемо написати у облику:

$$\sigma_z(z, y, t) = y \left\{ E_0 \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} + E_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right] \right\} \quad (16)$$

где је $\mathfrak{D}_t^\alpha[\bullet]$ изнака за за извод нецелог реда која је дефинисана раније у тексту изразом (2): $\sigma_z(z, y, t)$ је нормални напон у тачкама попречног пресека и линијском елементу на удаљењу z од левог краја греде, на удаљењу y од неутралне осе савијања греде; $\varphi(z, t)$ је угао обртања попречног пресека савијене греде; $\varepsilon_z(z, y, t) = y \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z}$ је дилатација линијског елемента греде на удаљењу y од неутралне осе савијања греде.

У формулацији проблема стохастичке стабилности нехомогене греде од материјала са особиним пузања и конститутивном релацијом која садржи извод рационалног реда претпоставићемо да параметри материјала зависе и од координате пресека и координате положаја тачке у попречном пресеку греде. Разматрамо случај трансверзалних осцилација двослојне призматичне греде која је изложена дејству случајне силе ограничене амплитуде.

Претпостављамо да је двослојна греда, нехомогена, начињена од материјала са особиним пузања и конститутивним релацијама типа (16) за оба слоја, нехомогености су изражене континуалним функцијама дуж греде у функцији координата z и y . Модули еластичности слојева греде за случај тренутног и дуготрајног оптерећивања греде су дефинисани следећим изразима:

$$\begin{aligned} E_e^{(1)}(z, y) &= E_0^{(1)} f_e^{(1)}(z) f_e^{(11)}(y) & E_e^{(2)}(z, y) &= E_0^{(2)} f_e^{(2)}(z) f_e^{(22)}(y) \\ E_\alpha^{(1)}(z, y) &= E_{0\alpha}^{(1)} f_\alpha^{(1)}(z) f_\alpha^{(11)}(y) & E_\alpha^{(2)}(z, y) &= E_{0\alpha}^{(2)} f_\alpha^{(2)}(z) f_\alpha^{(22)}(y) \\ 0 &\leq \alpha \leq 1 \\ 0 &\leq z \leq \ell; -h_1 \leq y \leq h_2 \end{aligned} \quad (17)$$

У посматраном случају везе између инкремента нормалног напона и деформације у тачкама попречних пресека и линијским елементима слојева греде се могу изразити на следећи начин:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_z^{(1)} &= E_e^{(1)} \Delta \varepsilon_z^{(1)} + E_\alpha^{(1)} \mathfrak{D}_t^\alpha [\Delta \varepsilon_z^{(1)}] & -h_1 \leq y \leq 0 \\ \Delta \sigma_z^{(2)} &= E_e^{(2)} \Delta \varepsilon_z^{(2)} + E_\alpha^{(2)} \mathfrak{D}_t^\alpha [\Delta \varepsilon_z^{(2)}] & 0 \leq y \leq h_{2-} \end{aligned} \quad (18)$$

Овде су h_1 и h_2 дебљине одговарајућих слојева.

Дулатације су:

$$\varepsilon_z = y \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \quad \text{и} \quad \Delta \varepsilon_z = y \frac{\partial \Delta \varphi(z, t)}{\partial z} \quad (19)$$

где је $\varphi(z, t)$ угао чистог савијања – нагиб попречног пресека услед чистог савијања:

$$\begin{aligned} d\sigma_z^{(1)} &= E_0^{(1)} f_e^{(1)}(z) f_e^{(11)}(y) dy \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} + E_{0\alpha}^{(1)} f_\alpha^{(1)}(z) f_\alpha^{(11)}(y) \mathfrak{D}_t^\alpha \left[dy \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right] \\ & -h_1 \leq y \leq 0 \\ d\sigma_z^{(2)} &= E_0^{(2)} f_e^{(2)}(z) f_e^{(22)}(y) dy \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} + E_{0\alpha}^{(2)} f_\alpha^{(2)}(z) f_\alpha^{(22)}(y) \mathfrak{D}_t^\alpha \left[dy \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right] \\ & 0 \leq y \leq h_{2-} \end{aligned} \quad (20)$$

Услов динамичке равнотеже пишемо у облику:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^N \vec{M}_0^{\vec{F}_i} = \vec{M}_{fx} = \vec{\mathfrak{m}}_{fx}^{\vec{F}_i}$$

или

$$\begin{aligned} \iint_{A''} \sigma_z^{(1)} dx dy + \iint_{A''} \sigma_z^{(2)} dx dy &= 0, & \iint_{A''} \sigma_z^{(1)} x dx dy + \iint_{A''} \sigma_z^{(2)} x dx dy &\cong 0 \\ \iint_{A''} \sigma_z^{(1)} y dx dy + \iint_{A''} \sigma_z^{(2)} y dx dy &= \mathfrak{m}_{fx} \end{aligned} \quad (20)$$

Ако уведемо следеће ознаке:

$$a_{\alpha}^{(1)(n)} = \int_{-h_1}^0 f_{\alpha}^{(11)}(y) y^n dy, \quad a_{\alpha}^{(2)(n)} = \int_0^{h_2} f_{\alpha}^{(22)}(y) y^n dy, \quad n = 0, 1, 2 \quad (22)$$

Претходне услове динамичке равнотеже можемо да напишемо помоћу следећих релација и израза:

$$a_e^{(1)(1)} E_0^{(1)} f_e^{(1)}(z) - a_e^{(2)(1)} E_0^{(2)} f_e^{(2)}(z) = 0 \Rightarrow f_e^{(2)}(z) = f_e^{(1)}(z) \frac{E_0^{(1)} a_e^{(1)(1)}}{E_0^{(2)} a_e^{(2)(1)}}$$

$$a_{\alpha}^{(1)(1)} E_{0\alpha}^{(1)} f_{\alpha}^{(1)}(z) - a_{\alpha}^{(2)(1)} E_{0\alpha}^{(2)} f_{\alpha}^{(2)}(z) = 0 \Rightarrow f_{\alpha}^{(2)}(z) = f_{\alpha}^{(1)}(z) \frac{E_{0\alpha}^{(1)} a_{\alpha}^{(1)(1)}}{E_{0\alpha}^{(2)} a_{\alpha}^{(2)(1)}}$$

као и израза за момент савијања у попречном пресеку савијене греде:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{f_x}(z, t) = & b \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \left\{ E_0^{(1)} a_e^{(1)(2)} f_e^{(1)}(z) + E_0^{(2)} a_e^{(2)(2)} f_e^{(2)}(z) \right\} + \\ & + b \mathfrak{S}_t^{\alpha} \left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right] \left\{ E_{0\alpha}^{(1)} a_{\alpha}^{(1)(2)} f_{\alpha}^{(1)}(z) + E_{0\alpha}^{(2)} a_{\alpha}^{(2)(2)} f_{\alpha}^{(2)}(z) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

Затим, узимајући у обзир претходно добијене релације и изразе (22), (23) и (24) претходни израз за момент савијања можемо да напишемо у облику:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{f_x}(z, t) = & E_0^{(1)} b \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} f_e^{(1)}(z) \left\{ a_e^{(1)(2)} + a_e^{(2)(2)} \frac{a_e^{(1)(1)}}{a_e^{(2)(1)}} \right\} + \\ & + E_{0\alpha}^{(1)} b f_{\alpha}^{(1)}(z) \mathfrak{S}_t^{\alpha} \left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right] \left\{ a_{\alpha}^{(1)(2)} + a_{\alpha}^{(2)(2)} \frac{a_{\alpha}^{(1)(1)}}{a_{\alpha}^{(2)(1)}} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

Ако узмемо у рачун утицај инерције обртања попречног пресека можемо написати следеће две једначине динамичке равнотеже греде:

$$d J_x \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} = -d \mathfrak{M}_f(z, t) + F_T(z, t) dz + F_N(\Xi, z, t) dv(z, t) \quad (27)$$

$$dm \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = d F_T(z, t) \quad (28)$$

Ако уведемо ознаке:

$$dm = (\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2) dz \quad \text{и} \quad dJ_x = [\rho_1 I_x^{(1)} + \rho_2 I_x^{(2)}] dz \quad (29)$$

једначине динамике греде (17) и (28) можемо да напишемо у следећем облику:

$$\begin{aligned} [\rho_1 I_x^{(1)} + \rho_2 I_x^{(2)}] \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} = & E_0^{(1)} b \left[a_e^{(1)(2)} + a_e^{(2)(2)} \frac{a_e^{(1)(1)}}{a_e^{(2)(1)}} \right] \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} f_e^{(1)}(z) \right] + \\ & + E_{0\alpha}^{(1)} b \left[a_{\alpha}^{(1)(2)} + a_{\alpha}^{(2)(2)} \frac{a_{\alpha}^{(1)(1)}}{a_{\alpha}^{(2)(1)}} \right] \frac{\partial}{\partial z} \left\{ f_{\alpha}^{(1)}(z) \mathfrak{S}_t^{\alpha} \left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right] \right\} + F_T + F_N \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \\ (\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2) \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = & \frac{\partial F_T(z, t)}{\partial z} \end{aligned} \quad (30) - (31)$$

После елиминисања угла обртања попречног пресека при савијању греде и трансверзалне силе добијамо парцијалну рационалног реда диференцијалну једначину трансверзалних осцилација двослојне нехомогене греде од два материјала са особинама пузања. Та парцијална рационалног реда диференцијална једначина је облика:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} + \frac{E_0^{(1)} b \left[a_e^{(1)(2)} + a_e^{(2)(2)} \frac{a_e^{(1)(1)}}{a_e^{(2)(1)}} \right]}{(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} f_e^{(1)}(z) \right] + \frac{1}{(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)} \frac{\partial}{\partial z} \left[F_N \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} \right] + \\ + \frac{E_{0\alpha}^{(1)} b \left[a_\alpha^{(1)(2)} + a_\alpha^{(2)(2)} \frac{a_\alpha^{(1)(1)}}{a_\alpha^{(2)(1)}} \right]}{(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ f_\alpha^{(1)}(z) \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} \right] \right\} + \frac{[\rho_1 \mathbf{I}_x^{(1)} + \rho_2 \mathbf{I}_x^{(2)}]}{(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)} \frac{\partial^4 v(z,t)}{\partial t^2 \partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Звођењем следећих ознака:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{0x}^2 = \frac{\tilde{E}_0^{(1)}}{\rho} \tilde{i}_{xe}^2 = \frac{E_0^{(1)} b \left[a_e^{(1)(2)} + a_e^{(2)(2)} \frac{a_e^{(1)(1)}}{a_e^{(2)(1)}} \right]}{(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)}, \quad \tilde{i}_x^2 = \frac{[\rho_1 \mathbf{I}_x^{(1)} + \rho_2 \mathbf{I}_x^{(2)})]}{(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)} \\ \tilde{c}_{0\alpha}^2 = \frac{\tilde{E}_{0\alpha}^{(1)}}{\rho} \tilde{i}_{x\alpha}^2 = \frac{E_{0\alpha}^{(1)} b \left[a_\alpha^{(1)(2)} + a_\alpha^{(2)(2)} \frac{a_\alpha^{(1)(1)}}{a_\alpha^{(2)(1)}} \right]}{(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)}, \quad \hat{i}_x^2 = \frac{[\rho_1 \mathbf{I}_x^{(1)} + \rho_2 \mathbf{I}_x^{(2)})]}{A\rho} \\ \tilde{i}_{xe}^2 = \frac{b \left[a_e^{(1)(2)} + a_e^{(2)(2)} \frac{a_e^{(1)(1)}}{a_e^{(2)(1)}} \right]}{A}, \quad \tilde{i}_{x\alpha}^2 = \frac{b \left[a_\alpha^{(1)(2)} + a_\alpha^{(2)(2)} \frac{a_\alpha^{(1)(1)}}{a_\alpha^{(2)(1)}} \right]}{A}. \end{aligned} \quad (33)$$

Претходну парцијалну рационалног реда диференцијалну једначину трансверзалних осцилација двослојне нехомогене греде, од два материјала са особинама пузања, оптерећену аксијалном случајном силом F_N , можемо написати у облику:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} + \tilde{c}_{0x}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} f_e^{(1)}(z) \right] + \frac{1}{(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)} \frac{\partial}{\partial z} \left[F_N \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} \right] + \\ + \tilde{c}_{0\alpha}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ f_\alpha^{(1)}(z) \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} \right] \right\} - \tilde{i}_x^2 \frac{\partial^4 v(z,t)}{\partial t^2 \partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Даље ћемо разлотрити специјалан случај: Из претходне једначине искључимо аксијалну силу и усмеримо пажњу на сопствене трансверзалне осцилације двослојне нехомогене греде, од два материјала са особинама пузања, у облику:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} + \tilde{c}_{0x}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} f(z) \right] + \tilde{c}_{0\alpha}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ f(z) \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} \right] \right\} - \tilde{i}_x^2 \frac{\partial^4 v(z,t)}{\partial t^2 \partial z^2} = 0 \quad (35)$$

где је

$$f_e^{(1)}(z) = f_\alpha^{(1)}(z) = f(z) \quad (36)$$

Сада користећи Бернулијеву (Bernoulli) методу партикуларних интеграла за решавање претходне парцијалне рационалног реда диференцијалне једначине (35),

трансверзално померање $v(z, t)$ тачака неутралне површи двослојне греде можемо написати у облику производа две функције, од којих једна $Z(z)$ зависи само од координате z , а друга $T(t)$ само од времена t :

$$v(z, t) = Z(z)T(t) \quad (37)$$

Уношењем претпостављеног решења у парцијалну рационалног реда диференцијалну једначину (37) исту раздвајамо на две:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} [Z''(z)f(z)] + \tilde{i}_x^2 k^4 Z''(z) - k^4 Z(z) &= 0 \\ \ddot{T}(t) + \tilde{\omega}_{\alpha x}^2 \mathfrak{D}_t^\alpha [\Gamma(t)] + \tilde{\omega}_{0x}^2 \Gamma(t) &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

где су уведене ознаке:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{0x}^2 = k^4 \tilde{c}_{0x}^2 &= k^4 \frac{E_0^{(1)} b \left[a_e^{(1)(2)} + a_e^{(2)(2)} \frac{a_e^{(1)(1)}}{a_e^{(2)(1)}} \right]}{(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)}, \quad \tilde{i}_x^2 = \frac{[\rho_1 I_x^{(1)} + \rho_2 I_x^{(2)}]}{(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)} \\ \tilde{\omega}_{\alpha x}^2 = k^4 \tilde{c}_{0x\alpha}^2 &= k^4 \frac{E_{0\alpha}^{(1)} b \left[a_\alpha^{(1)(2)} + a_\alpha^{(2)(2)} \frac{a_\alpha^{(1)(1)}}{a_\alpha^{(2)(1)}} \right]}{(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Видимо да је друга једначина система (38) обична диференцијална једначина фракционог (рационалног) реда по сопственим функцијама $T(t)$, које зависе од времена t , истог облика као и одговарајућа (11), односно (15), добијене за случај лонгитудиналних осцилација штапа променљивог попречног пресека односно трансверзалних осцилација хомогене греде. Видимо да својства пузања материјала утичу на функцију времена:

3. 2* Одређивање функције времена решења обичне фракционог реда диференцијалне једначине.

Друга једначина система (38) односно система (11), односно система (15), је обична фракционог (рационалног) реда диференцијална једначина по сопственим функцијама $T(t)$, које зависе од времена па ћемо је зато појединачно размотрити и одредити њена решења. Зато проучимо решења следеће обичне фракционог реда диференцијалне једначине:

$$\ddot{T}(t) + \omega_\alpha^2 T^{(\alpha)}(t) + \omega_0^2 T(t) = 0 \quad (40)$$

Ова обична фракционог реда диференцијална једначина (40) може се решити помоћи методе Лапласове (Laplace-ове) трансформације (види референце [8], [9], [6], [18] и [15]), чијом применом добијамо Лапласову (Laplace-ову) трансформацију решења у домену комплексне функције комплексне променљиве p у облику:

$$\mathfrak{Z}(p) = \mathfrak{Z}[T(t)] = \frac{pT(0) + \dot{T}(0)}{p^2 + \omega_0^2 \left[1 + \frac{\omega_\alpha^2}{\omega_0^2} \mathbf{R}(p) \right]} \quad (41)$$

у коме је $\mathfrak{Z}[\mathfrak{I}_t^\alpha [T(t)]] = \mathbf{R}(p)\mathfrak{Z}[T(t)]$ Лапласеова (Laplace-ова) трансформација извода рационалног реда $\frac{d^\alpha T(t)}{dt^\alpha}$ за $0 \leq \alpha \leq 1$. За реолошки модел материјала фракционог реда, који разматрамо у сва три случаја из претходних параграфа, следи да је:

$$\mathfrak{Z}[\mathfrak{I}_t^\alpha [T(t)]] = \mathbf{R}(p)\mathfrak{Z}[T(t)] - \frac{d^{\alpha-1} T(0)}{dt^{\alpha-1}} = p^\alpha \mathfrak{Z}[T(t)] - \frac{d^{\alpha-1} T(0)}{dt^{\alpha-1}} \quad (42)$$

При чему смо усвојили да у почетном тренутку важи да је:

$$\left. \frac{d^{\alpha-1} T(t)}{dt^{\alpha-1}} \right|_{t=0} = 0 \quad (42^*)$$

тако да је Лапласеова (Laplace-ова) трансформација функције $T(t)$ одређена следећом изратом:

$$\mathfrak{Z}\{T(t)\} = \frac{pT_0 + \dot{T}_0}{p^2 + \omega_\alpha^2 p^\alpha + \omega_0^2} \quad (43)$$

За граничне случајеве када параметар пузања материјала греде α узима вредности нула и јединица, $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ постоје два специјална проста случаја која одговарају обичним диференцијалним једначинама целобројног реда. У тим случајевима од обичне фракционог реда диференцијалне једначине добијамо:

$$1^* \ddot{T}(t) + \tilde{\omega}_0^2 T^{(0)}(t) + \omega_0^2 T(t) = 0 \quad \text{за } \alpha = 0 \quad (44)$$

где је $T^{(0)}(t) = T(t)$,

и

$$2^* \ddot{T}(t) + \omega_1^2 T^{(1)}(t) + \omega_0^2 T(t) = 0 \quad \text{за } \alpha = 1 \quad (45)$$

где је $T^{(1)}(t) = \dot{T}(t)$.

Решења једначина (44) и (45) су:

$$1^* T(t) = T_0 \cos t \sqrt{\omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2} + \frac{\dot{T}_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2}} \sin t \sqrt{\omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2}, \quad \text{за } \alpha = 0 \quad (46)$$

$$2^* \text{ а. } T(t) = e^{-\frac{\omega_1^2}{2} t} \left\{ T_0 \cos t \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_1^4}{4}} + \frac{\dot{T}_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_1^4}{4}}} \sin t \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_1^4}{4}} \right\} \quad (47)$$

за $\alpha = 1$ и за $\omega_0 > \frac{1}{2} \omega_1^2$. (за слабо својство пузања);

$$2^* \text{ b. } T(t) = e^{-\frac{\omega_0^2}{2}t} \left\{ T_0 \operatorname{Ch} t \sqrt{\frac{\omega_1^4}{4} - \omega_0^2} + \frac{\dot{T}_0}{\sqrt{\frac{\omega_1^4}{4} - \omega_0^2}} \operatorname{Sh} t \sqrt{\frac{\omega_1^4}{4} - \omega_0^2} \right\} \quad (48)$$

за $\alpha = 1$ и за $\omega_0 < \frac{1}{2} \omega_1^2$ (за јако својство пузања);

$$2^* \text{ c. } T(t) = e^{-\frac{\omega_1^2}{2}t} \left\{ T_0 + \frac{2\dot{T}_0}{\omega_1^2} t \right\} \quad (49)$$

за $\alpha = 1$ и за $\omega_0 = \frac{1}{2} \omega_1^2$. (за критични случај својстава пузања).

Обична фракционог реда диференцијална једначина (40) у општем случају, где је α из интервала $0 < \alpha < 1$ може се решити узимањем да је Лапласеова (Laplace-ова) трансформација извода рационалног реда у облику: t is:

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{d^\alpha T(t)}{dt^\alpha} \right\} = p^\alpha \mathfrak{L} \{ T(t) \} - \frac{d^{\alpha-1} T(t)}{dt^{\alpha-1}} \Big|_{t=0} = p^\alpha \mathfrak{L} \{ T(t) \} \quad (50)$$

и увођењем почетних услова (42*), и применом Лапласеове (Laplace-ове) трансформације на једначину (40) тако да смо добили Лапласеову (Laplace-ову) трансформацију (43) решења обичне фракционог реда диференцијалне једначине. Можемо закључити да постоје два случаја.

За случај када је $\omega_0^2 \neq 0$, Лапласеова (Laplace-ова) трансформација (43) се може развити у ред тако да добијамо следећи ред:

$$\mathfrak{L} \{ T(t) \} = \frac{pT_0 + \dot{T}_0}{p^2 \left[1 + \frac{\omega_\alpha^2}{p^2} \left(p^\alpha + \frac{\omega_0^2}{\omega_\alpha^2} \right) \right]} = \left(T_0 + \frac{\dot{T}_0}{p} \right) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{\omega_\alpha^2}{p^2} \left(p^\alpha + \frac{\omega_0^2}{\omega_\alpha^2} \right)} \quad (51)$$

односно

$$\mathfrak{L} \{ T(t) \} = \left(T_0 + \frac{\dot{T}_0}{p} \right) \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega_\alpha^{2k}}{p^{2k}} \left(p^\alpha + \frac{\omega_0^2}{\omega_\alpha^2} \right)^k \quad (52)$$

односно

$$\mathfrak{L} \{ T(t) \} = \left(T_0 + \frac{\dot{T}_0}{p} \right) \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega_\alpha^{2k}}{p^{2k}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{p^{\alpha j} \omega_\alpha^{2(j-k)}}{\omega_0^{2j}} \quad (53)$$

При развијању у ред (53) претпоставили смо да се ради о конвергентном реду (види референце [7, 4, 66]). Инверзна Лапласеова трансформација од добијеног израза (53) у виду низа базира се на познатој теорему и табличним инверзима, на основу које решење обичне фракционог реда диференцијалне једначине (40) за функцију времена добијамо следећи степени ред у функцији времена:

$$T(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{T(t)\} = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \omega_{\alpha}^{2k} t^{2k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\omega_{\alpha}^{2j} t^{-cj}}{\omega_o^{2j} \Gamma(2k+1-cj)} + \dot{T}_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \omega_{\alpha}^{2k} t^{2k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\omega_{\alpha}^{-2j} t^{-cj}}{\omega_o^{2j} \Gamma(2k+2-cj)} \quad (54)$$

или

$$T(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{T(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \omega_{\alpha}^{2k} t^{2k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\omega_{\alpha}^{2j} t^{-cj}}{\omega_o^{2j}} \left[\frac{T_0}{\Gamma(2k+1-cj)} + \frac{\dot{T}_0 t}{\Gamma(2k+2-cj)} \right] \quad (55)$$

Два специјална случаја за $\omega_0^2 = 0$ су:

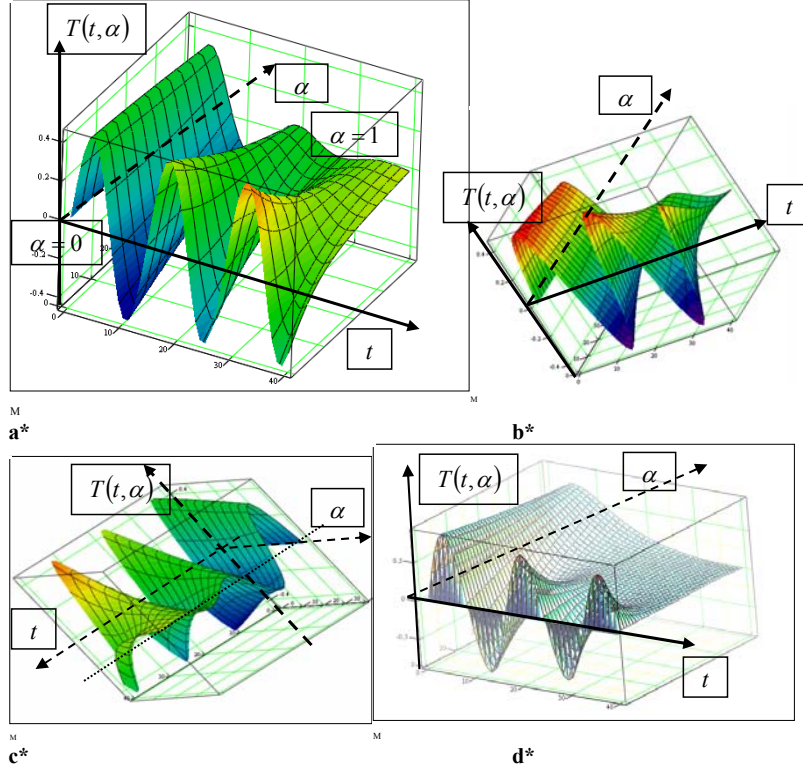
$$T(t) = T_0 \cos \tilde{\omega}_o t + \frac{\dot{T}_0}{\tilde{\omega}_o} \sin \tilde{\omega}_o t \quad \text{за } \alpha = 0 \text{ и } \omega_0^2 = 0. \quad (56)$$

$$T(t) = T_0 + \frac{\dot{T}_0}{\omega_1^2} (1 - e^{-\omega_1^2 t}) \quad \text{за } \alpha = 1 \text{ и } \omega_0^2 = 0 \quad (57)$$

На слици 3. се види резултат нумеричке симулације и графичке презентације модова решења. Приказане су површи функције времена $T(t, \alpha)$ за раличите кинетичке параметре греде и параметре материјала греде, која трансверзално осцилује у интервалу $0 \leq \alpha \leq 1$: **a*** за $\left(\frac{\omega_{\alpha x}}{\omega_{0x}}\right) = 1$; **b*** за $\left(\frac{\omega_{\alpha x}}{\omega_{0x}}\right) = \frac{1}{4}$; **c*** за $\left(\frac{\omega_{\alpha x}}{\omega_{0x}}\right) = \frac{1}{3}$; **d*** за $\left(\frac{\omega_{\alpha x}}{\omega_{0x}}\right) = 3$.

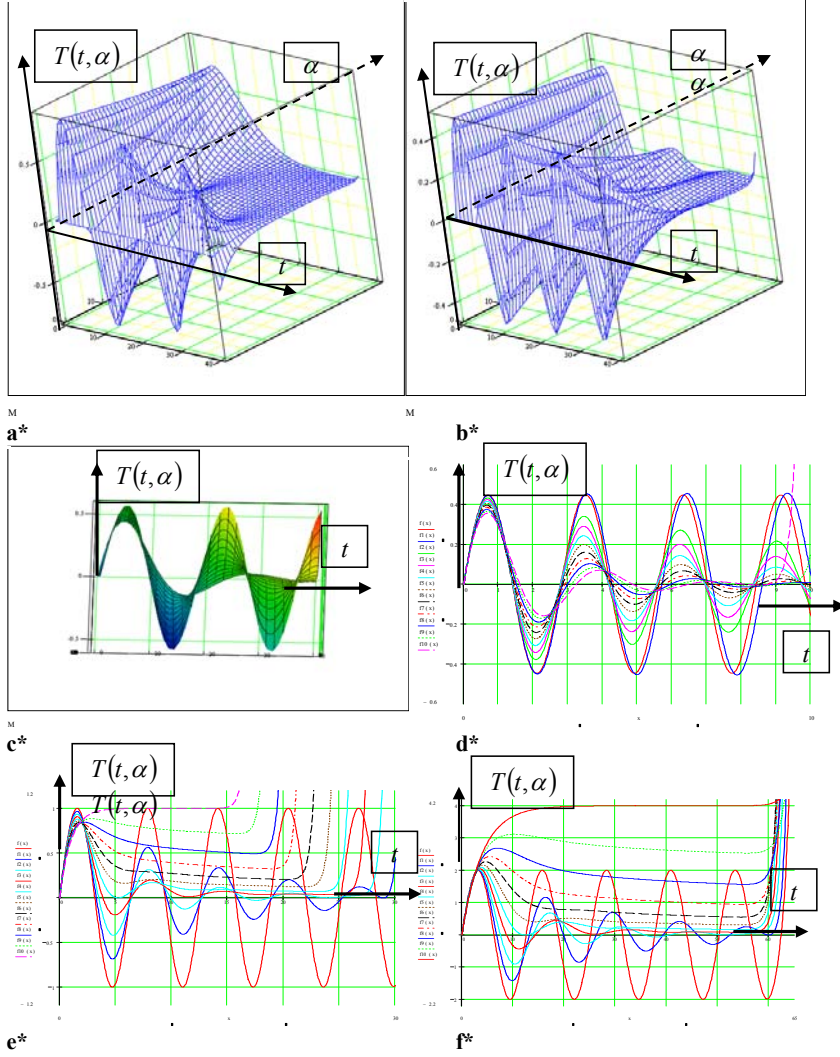
И на слици 4. се види резултат нумеричке симулације и графичке презентације модова решења. Приказане су површи функције времена $T(t, \alpha)$, као и фамилије кривих за раличите кинетичке параметре греде и параметре материјала греде, која трансверзално осцилује у интервалу $0 \leq \alpha \leq 1$: **a*** и **c*** за $\left(\frac{\omega_{\alpha x}}{\omega_{0x}}\right) = 1$; **b*** и **d*** за $\left(\frac{\omega_{\alpha x}}{\omega_{0x}}\right) = \frac{1}{4}$; **e*** за

$$\left(\frac{\omega_{\alpha x}}{\omega_{0x}}\right) = \frac{1}{3}; \text{ и } \mathbf{f}^* \text{ за } \left(\frac{\omega_{\alpha x}}{\omega_{0x}}\right) = 3.$$



Слика 3. Нумеричка симулација и графичка презентација модова решења. Површи функције времена $T(t, \alpha)$ за раличите кинетичке параметре греде и параметре материјала греде која трансверзално осцилује, $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\mathbf{a}^* \left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}} \right) = 1; \quad \mathbf{b}^* \left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}} \right) = \frac{1}{4}; \quad \mathbf{c}^* \left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}} \right) = \frac{1}{3}; \quad \mathbf{d}^* \left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}} \right) = 3$$



Слика 4. Нумеричка симулација и графичка презентација модела решења Површи функције времена $T(t, \alpha)$ и фамилије кривих за раличите кинетичке параметре греде и параметре материјала греде која трансверзално осцилује $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\mathbf{a}^* \text{ и } \mathbf{c}^* \left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}} \right) = 1; \quad \mathbf{b}^* \text{ и } \mathbf{d}^* \left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}} \right) = \frac{1}{4}; \quad \mathbf{e}^* \left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}} \right) = \frac{1}{3}; \quad \mathbf{f}^* \left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}} \right) = 3.$$

4 ПАРЦИЈАЛНА ФРАКЦИОНОГ РЕДА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА ПУЗЕЊИХ ОСЦИЛАЦИЈА ПЛОЧЕ И ЊЕНА РЕШЕЊА.

4. 1* Основне претпоставке кинематике деформације плоче.

Претпоставимо да посматрамо танку плочу и да попречни пресеци плоче немају депланацију, иако је материјал плоче са особинама пузања. Такође претпоставимо да су попречни пресеци плоче увек ортогонални на средњу површ плоче, као и да су трансверзална померања плоче мала у поређењу са дебелином плоче h .

Уведене су следеће претпоставке:

1* Нормале на средњу површ плоче пре пузања материјала плоче остају ортогоналне на средњу површ плоче и у савијеном стању плоче;

2* Нормални напон σ_z је мали у поређењу са осталим компонентама тензора напона у свакој тачки плоче и у њеном напрегутуму и деформисаном стању и дозвољено га је занемарити;

3* Средња површ плоче је ненапрегута у савијеном стању плоче.

На основу претходних претпоставки, може се усвојити да се померања $u(x, y, z, t)$ и $v(x, y, z, t)$ тачака $N(x, y, z)$ плоче, у правцима координатних оса x и y , могу изразити у функцији растојања посматране тачке $N(x, y, z)$ од средње површи плоче и трансверзалног померања $w(x, y, z, t)$ одговарајуће тачке средње површи плоче. Користећи методу из референци [78,79] Д. П. Рашковића, могу се написати изрази за померања $u(x, y, z, t)$ и $v(x, y, z, t)$ тачака $N(x, y, z)$ плоче у следећем облику:

$$\begin{aligned} u &= -z \operatorname{tg} \alpha \approx -z \alpha = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \operatorname{tg} \beta \approx -z \beta = -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (58)$$

као и изрази за прве кривине средње површи плоче у тачки $N(x, y, 0)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x &= \frac{1}{\mathbf{R}_x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \mathbf{K}_y &= \frac{1}{\mathbf{R}_y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (59)$$

у којима су \mathbf{R}_x и \mathbf{R}_y главни полупречници кривина средње површи плоче у тачки $N(x, y, 0)$. За прве кривине средње површи плоче у тачки $N(x, y, 0)$ могу се написати и следећи изрази:

$$\mathbf{K}_\xi = \frac{1}{\mathbf{R}_\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{K}_x \cos^2 \varphi + \mathbf{K}_y \sin^2 \varphi - \mathbf{K}_{xy} \sin 2\varphi \\
 \mathbf{K}_\eta &= \frac{1}{\mathbf{R}_\eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = \\
 &= \mathbf{K}_x \sin^2 \varphi + \mathbf{K}_y \cos^2 \varphi + \mathbf{K}_{xy} \sin 2\varphi
 \end{aligned} \tag{60}$$

Полузбир првих кривина средње површи плоче у тачки $N(x, y, 0)$ је средња кривина средње површи плоче у истој тачки и независна је од избора ортогоналног пара координатних линија и база у средњој површи плоче ; $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ је друга кривина или торзија

деформисане средње површи плоче и може се изразити на следећим изразом:

$$\mathfrak{F}_{\varepsilon \eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \varphi \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{K}_x - \mathbf{K}_y) \sin 2\varphi + \mathfrak{F}_{xy} \cos 2\varphi \tag{61}$$

Компоненте тензора релативне деформације у произвољној тачки $N(x, y, z)$ плоче су:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{z}{\mathbf{R}_x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{z}{\mathbf{R}_y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2 \frac{z}{\mathbf{R}_t}
 \end{aligned} \tag{62}$$

4. 2* Конститутивне релације напон-деформација напрегнутог материјала плоче са особинама пужења.

Усвојимо, на основу уведених претпоставки о материјалу плоче са особиним пужења и својствима плоче у деформисању, да су изрази за конститутивне релације материјала напон- деформација у следећем облику:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \mathbf{E}_{0x} \varepsilon_x(t) + \mathbf{E}_{\alpha x} \mathfrak{D}_t^{\alpha x} [\varepsilon_x(t)] \\
 \sigma_y &= \mathbf{E}_{0y} \varepsilon_y(t) + \mathbf{E}_{\alpha y} \mathfrak{D}_t^{\alpha y} [\varepsilon_y(t)] \\
 \tau_{xy} &= \mathbf{G}_0 \gamma_{xy}(t) + \mathbf{G}_\alpha \mathfrak{D}_t^{\alpha y} [\gamma_{xy}(t)]
 \end{aligned} \tag{63}$$

у којима су: $\mathfrak{D}_t^{\alpha y} [*]$ оператор фракционог реда диференцирања по времену дефинисан изразом (2), у коме је константа материјала α у интервалу $0 < \alpha < 1$; \mathbf{E}_{0x} , \mathbf{E}_{0y} , $\mathbf{E}_{\alpha x}$, $\mathbf{E}_{\alpha y}$ коефицијенти еластичности материјала за случај тренутног – краткотрајног

и дуготрајног оптерећивања материјала у одговарајућим правцима координатних оса; α_x , α_y и α_{xy} су константе материјала плоче које карактеришу особине пужења материјала у

правцима координатних оса; $\mathbf{G}_0 = \frac{\mathbf{E}_0}{2(1+\mu)}$ и $\mathbf{G}_\alpha = \frac{\mathbf{E}_\alpha}{2(1+\mu)}$ су одговарајући модули

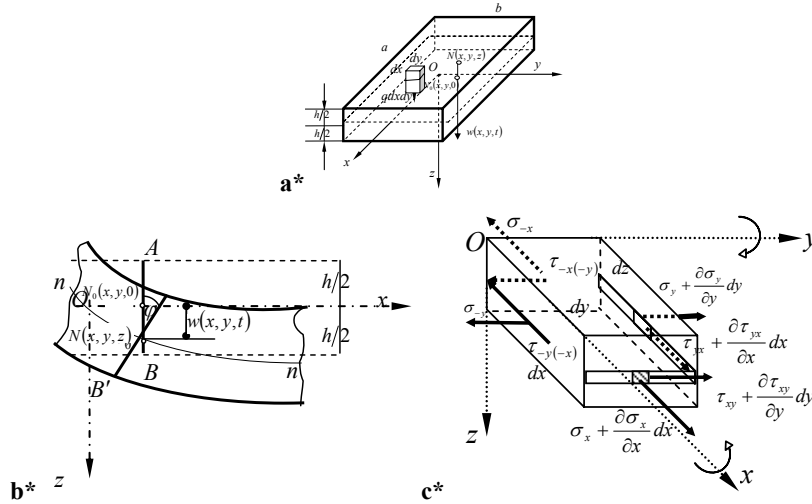
смицања, сагласно уведеним претпоставкама. На основу усвојених претпоставки поставили смо конститутивне релације напон-деформација (63).

Сада у те релације напон деформација, се уносе изрази за компоненте тензора релативне деформације изражене помоћу трансверзалног померања $w(x, y, t)$ тачака $N(x, y, 0)$ средње површи плоче и координате z одговарајуће тачке плоче $N(x, y, z)$. За хомогени изотропни материјал усвајамо следеће карактеристике материјала $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$, $\mathbf{E}_{0x} = \mathbf{E}_{0y} = \mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}_{\alpha x} = \mathbf{E}_{\alpha y} = \mathbf{E}_\alpha$ те су везе између компонената тензора напона у произвољној тачки плоче $N(x, y, z)$ и њеног удаљења z од средње површи плоче и трансверзалног померања $w(x, y, t)$ тачака $N(x, y, 0)$ средње површи плоче, дате следећим изразима:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{\mathbf{E}_0 z}{(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - \frac{\mathbf{E}_\alpha z}{(1-\mu^2)} \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right] \\ \sigma_y &= -\frac{\mathbf{E}_0 z}{(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\mathbf{E}_\alpha z}{(1-\mu^2)} \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \right] \\ \tau_{xy} &= -\frac{z \mathbf{E}_0}{(1+\mu)} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \partial y} - \frac{z \mathbf{E}_\alpha}{(1+\mu)} \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right]\end{aligned}\quad (64)$$

После примене услова равнотеже сила које дејствују на елемент плоче, јер ако је плоча у равнотежи, мора бити у равнотежи и сваки њен елемент, то коришћењем Navier-ових једначина равнотеже и претходно добијених израза (64) за три компоненте σ_x , σ_y и τ_{xy} тензора напона одређујемо преостале три компоненте τ_{xz} , τ_{yz} и σ_z тензора напона у произвољној тачки плоче:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}(x, y, z, t) = \tau_{zx}(x, y, z, t) &= -\frac{(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \left\{ \mathbf{E}_0 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w(x, y, t) + \mathbf{E}_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x} \Delta w(x, y, t) \right] \right\} \\ \tau_{yz}(x, y, z, t) = \tau_{zy}(x, y, z, t) &= -\frac{(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \left\{ \mathbf{E}_0 \frac{\partial}{\partial y} \Delta w(x, y, t) + \mathbf{E}_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial y} \Delta w(x, y, t) \right] \right\} \\ \sigma_z(x, y, z, t) &= \frac{(3h^2 z - 4z^3 - 1)}{24(1-\mu^2)} \left\{ \mathbf{E}_0 \Delta \Delta w(x, y, t) + \mathbf{E}_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha [\Delta \Delta w(x, y, t)] \right\} + \rho g \left(\frac{h}{2} - z \right)\end{aligned}\quad (65)$$



Слика 5. **a*** Плоча са назначеним геометријским параметрима и координатним системом. **b*** Попречни пресек плоче. **c*** Елемент плоче површине $dx dy$ у средњој површи плоче и представљеним компонентама тензора напона у тачкама на јединичним ширинама одговарајућих попречних пресека.

4. 3* Парцијална фракционог реда диференцијална једначина средње површи деформисане плоче.

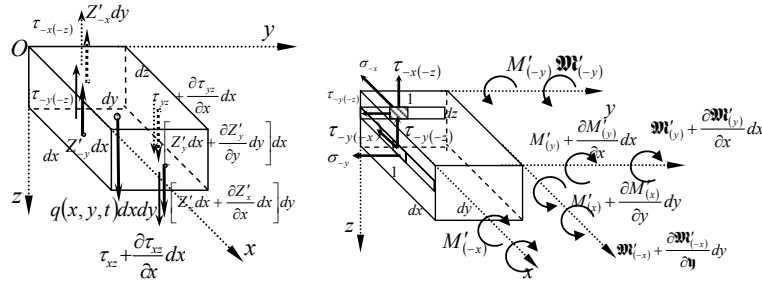
Користећи услове равнотеже сила на контури плоче, пишемо да је нормални напон σ_z на горњој површи плоче једнак спољашњој ортогоналној по површи плоче расподељеној површинској сили $p(x, y, z, t)$, па се добија:

$$\left\{ \Delta \Delta w(x, y, t) + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_i^\alpha [\Delta \Delta w(x, y, t)] \right\} = \frac{p(x, y, t) - \rho gh}{\mathfrak{D}_0} \quad (66)$$

у претходној једначини \mathfrak{D}_0 и \mathfrak{D}_α су цилиндричне крутости плоче за случај краткотрајног и дуготрајног оптерећивања плоче, док:

$$\mathfrak{D}_0 = \frac{E_0}{12(1 - \mu^2)}, \quad \mathfrak{D}_\alpha = \frac{E_\alpha}{12(1 - \mu^2)}, \quad \kappa_\alpha = \frac{\mathfrak{D}_\alpha}{\mathfrak{D}_0} = \frac{E_\alpha}{E_0} \quad (67)$$

Веза између спољашње ортогоналне по површи плоче расподељене површинске силе $p(x, y, z, t)$, и спољашње запреминске силе тежине ρgh и трансверзалног померања $w(x, y, t)$ тачака $N(x, y, 0)$ средње површи плоче је у форми парцијалне фракционог реда диференцијалне једначине (66). Та, претходна парцијална фракционог реда диференцијална једначина (66) је истовремено и једначина средње површи плоче оптерећене спољашњим трансверзалним оптерећењем и сопственом тежином плоче.



Слика 6. а* Елемент плоче површине $dx dy$ у средњој површи плоче и приказ елемената попречних пресека јединичних висина у плочи и одговарајућих компонента смичућих напона у тим пресецима у правцу осе z , као и њима одговарајућих трансверзалних сила;

б* Елемент плоче површине $dx dy$ у средњој површи плоче и приказ елемената попречних пресека јединичних висина у плочи и одговарајућих момената савијања и момената увијања.

Можемо закључити да та добијена парцијална фракционог реда диференцијална једначина (66) представља допуњену класичну једначину деформације средње површи плоче коју је иницијално извела Sophie Germain (1815) у свом раду предатом Париској академији наука и унетом корекцијом од Lagrange-a.

4. 4* Једначина квази-статичке равнотеже плоче од материјала са особинама пужења и једначине трансверзалних осцилација плоче од материјала са особинама пужења оптерећена расподељеним спољашњим оптерећењем и средњој површи плоче комбинованим оптерећењем.

У претходним разматрањима, претпостављали смо да је плоча оптерећена само површинским расподељеним и трансверзалним оптерећењем. Ако је плоча оптерћена и површинским силама расподељеним у средњој површи плоче као додатним оптерећењем претходно изведена парцијална фракционог реда диференцијална једначина треба да буде допуњена члановима којима се узима у обзир утицај сила расподељених у њеној средњој површи.

У општем случају један призматични елемент плоче, ивица dx и dy , дебљине h оптерећен трансверзалном површински расподељеном силом $p(x, y, t) dx dy$ и специфичним површинским силама \mathbf{X}' , \mathbf{Y}' и $\mathbf{Y}'_x = \mathbf{X}'_y$ у средњој површи плоче, је оптерећен још и површинским силама услед појаве унутрашњих компонентних напона, односно њима одговарајућим еквивалентним по дејству трансверзалним силама и моментима савијања и моментима увијања. Такође треба узети у рачун и промене тих површинских сила и момената проузроковане променом координата на којима су те површине попречни пресеци плоче, при преласку са координата x и y на координате $x + dx$ и $y + dy$. Исто тако, такође треба узети у обзир заокретања нормала на средњу

површ плоче при савијању плоче. Даље, треба узети у рачун и промене компонената сопљашњих побршинских сила у редукованих на средњу површ плоче, \mathbf{X}' и \mathbf{Y}' , при премештању попречних пресека плоче са координатама x односно, y на координате

$x + dx$ и $y + dy$ тако да су те компоненте сила : $\left(\mathbf{X}' + \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial x} dx \right) dy$, $\left(\mathbf{Y}' + \frac{\partial \mathbf{Y}'}{\partial y} dy \right) dx$, $\left(\mathbf{X}_y' + \frac{\partial \mathbf{X}_y'}{\partial y} dy \right) dx$ и $\left(\mathbf{Y}_x' + \frac{\partial \mathbf{Y}_x'}{\partial x} dx \right) dy$. Тако, узимамо у разматрање да су ивице

елементарног паралелограма, паралелне ивице \overline{AB} и \overline{CD} на растојању dy , паралелне пре савијања плоче и у њеном савијеном стању, као и да одговарајуће силе узете дуж тог правца и усмерене у правцу осе z , их прате при савијању плоче за одговарајуће углове β и $\beta + \frac{\partial \beta}{\partial y} dy$. Исто важи и за други пар паралелних ивица \overline{AC} и \overline{BD} на растојању dx , као и да одговарајуће силе узете дуж правца те ивице, а усмерене у правцу осе z их прате при савијању плоче за одговарајуће углове α и $\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$.

Увођење претходних елемената у рачун при писању услова динамичке равнотеже сила елементарног дела плоче ивица dx и dy , дебљине h потребно остварити у облику следећих услова:

- a* услова динамичке равнотеже у правцу Ox осе;
- b* услова динамичке равнотеже у правцу Oy осе;
- c* услова динамичке равнотеже у правцу Oz осе.

После елиминисања трансверзалних сила, момената савијања и увијања добијамо коначно следећу парцијалну фракционог реда диференцијалну једначину средње површи плоче од материјала са особиним пужења:

$$\left\{ (1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha [\Delta \Delta w(x, y, t)]) \right\} = \frac{p(x, y, t)}{\mathfrak{D}_0} + \frac{1}{\mathfrak{D}_0} \left(\mathbf{X}' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mathbf{Y}' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\mathbf{X}_y' \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho h}{\mathfrak{D}_0} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (68)$$

4. 5* Основна парцијална фракционог реда диференцијална једначина и њено решење за случај слободних осцилација под утицајем особина пужења материјала плоче

Уведимо ознаку $c_0^4 = \frac{\mathfrak{D}_0}{\rho h} = \frac{E_0 h^3}{12 \rho h (1 - \mu^2)}$ и искључимо из претходно изведене

парцијалне фракционог реда диференцијалне једначине чланове који се односе на спољашње силе добијамо основну парцијалну фракционог реда диференцијалну једначину сопствених осцилација танке плоче под утицајем особина пужења њеног материјала у облику:

$$\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + c_0^4 \left\{ (1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) [\Delta \Delta w(x, y, t)] \right\} = 0 \quad (69)$$

Решење претходне парцијалне фракционог реда диференцијалне једначине одређујемо примњујући Bernoulli-јеву методу партикуларних интеграла претпостављајући трансверзално померање $v(x, y, t)$ тачака неутралне средње површи плоче у облику производа две функције, од којих једна $\mathbf{W}(x, y)$ зависи само од координата x и y , а друга $T(t)$ само од времена t .

$$w(x, y, t) = \mathbf{W}(x, y)T(t) \quad (70)$$

Претпостављено решење (70) уносимо у парцијалну фракционог реда диференцијалну једначину (69) и после увођења следећих ознака:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= k^4 c_0^4 = k^4 \frac{\mathfrak{D}_0}{\rho h} = k^4 \frac{\mathbf{E}_0 h^2}{12 \rho (1 - \mu^2)} \\ \omega_\alpha^2 &= \kappa_\alpha \omega_0^2 = k^4 \kappa_\alpha c_0^4 = k^4 \frac{\mathfrak{D}_\alpha}{\rho h} = k^4 \frac{\mathbf{E}_\alpha h^2}{12 \rho (1 - \mu^2)} \end{aligned} \quad (71)$$

исту можемо раздвојити на следеће две:

* прва је парцијална диференцијална једначина четвртог реда по непознатој сопственој амплитудној функцији $\mathbf{W}(x, y)$ која зависи само од координата x и y и у класичном је познатом облику:

$$\Delta \Delta \mathbf{W}(x, y) - k^4 \mathbf{W}(x, y) = 0 \quad (72)$$

може се раздвојити у следече две, такође парцијалне диференцијалне једначине, али обе другог реда:

$$\Delta \mathbf{W}(x, y) \pm k^2 \mathbf{W}(x, y) = 0 \quad (73)$$

и

* друга је обична фракционог реда диференцијална једначина по функцији времена $T(t)$ која зависи само од времена t и облика:

$$\ddot{T}(t) + \omega_0^2 (1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) [T(t)] = 0 \quad (74)$$

Видимо да је друга једначина система (74) обична диференцијална једначина фракционог (рационалног) реда по сопственим функцијама $T(t)$, које зависе од времена t , истог облика као и одговарајућа (11), односно (15), односно (38), добијене за случај лонгитудиналних осцилација штапа променљивог попречног пресека односно трансверзалних осцилација хомогене греде. Видимо да својства пузања материјала утичу на функцију времена, али не и на одговарајућу сопствену амплитудну функцију посматраног деформабилног тела у стању осциловања.

4. 6* Неки случајеви сопствене амплитудне функције и одговарајуће сопствене функције времена за трансверзалне осцилације плоче од материјала са особиним пужења.

Размотримо сада укратко, прво позната из литературе, решења [79, 80], сопствену амплитудну функцију $\mathbf{W}(x, y)$ у облику $\mathbf{W}(x, y) = \mathbf{X}(x)\mathbf{Y}(y)$ на основу чега се из (72) односно (73) добијају следеће две раздвојених координата обичне диференцијалне једначине:

$$\mathbf{X}''(x) + (\pm n^2 \pm k^2)\mathbf{X}(x) = 0, \quad \mathbf{Y}''(y) \mp n^2\mathbf{Y}(y) = 0 \quad (75)$$

које за случај правоугаоне плоче, слободно ослоњених ивица, дају следећа могућа партикуларна решења: $\mathbf{X}(x) := \sin mx; \cos mx; shmx; Chmx$, у којима је $m^2 = \pm n^2 \pm k^2$, и одговарајућа редом: $\mathbf{Y}(y) := \sin ny; \cos ny; shny; Chny$.

Ако је плоча кружна, онда је погодније са Descartes-ових координата прећи на поларно-цилиндричке координате r , φ и z , па сагласно референцама [79, 80], можемо да напишемо следеће једначине:

$$\Delta \mathbf{W}(r, \varphi) \pm k^2 \mathbf{W}(r, \varphi) = 0, \\ \text{ог} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \mathbf{W}(r, \varphi) \pm k^2 \mathbf{W}(r, \varphi) = 0 \quad (76)$$

које се увођењем претпостављеног решења за сопствену амплитудну функцију $\mathbf{W}(r, \varphi) = \Phi(\varphi)\mathbf{R}(r)$ раздваја на две:

$$\Phi''(\varphi) \pm n^2 \Phi(\varphi) = 0 \\ \mathbf{R}''(r) + \frac{1}{r} \mathbf{R}'(r) + \left(\pm k^2 \mp \frac{n^2}{r^2} \right) \mathbf{R}(r) = 0 \quad (77)$$

Партикуларна решења друге једначине претходног система је у облику Neuman-ових и Bessel-ових функција, али за $r = 0$ Neuman-ове функције узимају бесконачно велике вредности, па се зато за наша разматрања могу користити само партикуларна решења типа Bessel-ових функција прве врсте реалног аргумента $\mathbf{J}_n(x)$ као и имагинарног аргумента $\mathbf{I}_n(x)$ у којима је $x = kr$. Модификована Bessel-ова функција имагинарног аргумента $\mathbf{I}_n(x)$ реда n је облика:

$$\mathbf{I}_n(x) = (i)^{-n} \mathbf{J}_n(ix) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-x \cos t} \cos ntdt \quad (78)$$

Ако је n цео број, претходна модификована Bessel-ова функција имагинарног аргумента $\mathbf{I}_n(x)$ задовољава следећу једначину:

$$\mathbf{I}_n''(ix) + \frac{1}{(ix)} \mathbf{I}_n'(ix) - \left(1 + \frac{n^2}{(ix)^2} \right) \mathbf{I}_n(ix) = 0 \quad (79)$$

На основу претходних разматрања и цитиране литературе за решење једначине (76) пишемо следеће функције чиниоце:

$$\Phi_n(\varphi) = C_n \sin(n\varphi + \varphi_{0n}) \quad (80)$$

$$\mathbf{R}_{nm}(r) = \mathbf{J}_n(k_{nm}r) + K_{nm} \mathbf{I}_n(k_{nm}r) \quad (81)$$

Опште решење парцијалне фракционог реда диференцијалне једначине трансверзалних осцилација танке кружне плоче (средње површи плоче) (69), којој су придружени одговарајући гранични услови, добијамо у облику:

$$w(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\mathbf{J}_n(k_{nm}r) + K_{nm} \mathbf{I}_n(k_{nm}r)] \sin(n\varphi + \varphi_{0n}) \mathbf{T}_{nm}(t) \quad (82)$$

у коме је сопствена функција времена $\mathbf{T}_{nm}(t)$ у облику реда:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{nm}(t) = & \mathbf{T}_{0nm} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \omega_{cnm}^{2i} t^{2i} \sum_{j=0}^{j=i} \binom{i}{j} \frac{\omega_{cnm}^{2j} t^{-\alpha j}}{\omega_{0nm}^{2j} \Gamma(2i+1-\alpha j)} + \\ & + \dot{\mathbf{T}}_{0nm} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \omega_{cnm}^{2i} t^{2i-1} \sum_{j=0}^{j=i} \binom{i}{j} \frac{\omega_{cnm}^{-2j} t^{-\alpha j}}{\omega_{0nm}^{2j} \Gamma(2i+2-\alpha j)} \end{aligned} \quad (83)$$

у коме су коришћене следеће ознаке:

$$\omega_{0nm} = k_{nm}^2 c_0^2 = k_{nm}^2 \sqrt{\frac{\mathfrak{D}_0}{\rho h}} = k_{nm}^2 \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\mathbf{E}_0}{3\rho(1-\mu^2)}} \quad (84)$$

$$\omega_{cnm} = \omega_{0nm} \sqrt{\kappa_\alpha} = k_{nm}^2 c_0^2 \sqrt{\kappa_\alpha} = k_{nm}^2 \sqrt{\frac{\mathfrak{D}_\alpha}{\rho h}} = k_{nm}^2 \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\mathbf{E}_\alpha}{3\rho(1-\mu^2)}} \quad (85)$$

које садрже карактеристичне бројеве, који се добијају из одговарајућих карактеристичних једначина добијених из граничних услова које задовољава плоча на својим контурама.

Функције времена $\mathbf{T}_{nm}(t)$, облика (54), су решења серије обичних фракционог реда диференцијалних једначина (74), које припадају одговарајућој сопственој амплитуднох функцији $\mathbf{W}_{nm}(r, \varphi) = \Phi(\varphi)_m \mathbf{R}(r)_{nm}$, која задовољава одређене граничне услове.

4. 7* Решења парцијалне фракционог реда диференцијалне једначине правоугаоне плоче слободно зглобно ослоњене на крајевима.

Хајде да сада простудирамо слободне осцилације правоугаоне плоче, основних ивица a и b , слободно зглобно ослоњене на контури у средњој површи плоче. Гранични услови за тако ослоњену плочу су: да су momenti савијања на контурним ивицама плоче једнаки нули, као и угиви у тачкама контурне ивице плоче. На основу тога пишемо:

$$\text{за } x = 0 \quad w(0, y, t) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}'_{(x)}(0, y, t) = \mathbf{M}'_{yx}(0, y, t) &= -\mathfrak{D}_0(1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) \left[\frac{\partial^2 w(0, y, t)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w(0, y, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \\
 \text{за } x = a \quad w(a, y, t) &= 0 \\
 \mathbf{M}'_{(x)}(a, y, t) = \mathbf{M}'_{yx}(a, y, t) &= -\mathfrak{D}_0(1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) \left[\frac{\partial^2 w(a, y, t)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w(a, y, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \\
 \text{за } y = 0 \quad w(x, 0, t) &= 0 \\
 \mathbf{M}'_{(y)}(x, 0, t) = \mathbf{M}'_{xy}(x, 0, t) &= -\mathfrak{D}_0(1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) \left[\frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (86) \\
 \text{за } y = b \quad w(x, b, t) &= 0 \\
 \mathbf{M}'_{(y)}(x, b, t) = \mathbf{M}'_{xy}(x, b, t) &= -\mathfrak{D}_0(1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) \left[\frac{\partial^2 w(x, b, t)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, b, t)}{\partial y^2} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Парцијалну диференцијалну једначину (72) са пратећим граничним условима (86) задовољава решење следећег облика:

$$\mathbf{W}_{mn}(x, y) = C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (87)$$

при чему је:

$$\begin{aligned}
 k_{mn}^2 &= \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \\
 \omega_{0nm} &= \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] c_0^2 = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\mathbf{E}_0}{3\rho(1-\mu^2)}} \quad (88)
 \end{aligned}$$

Решење једначине трансверзалних померања тачака средње површи плоче за случај трансверзалних осцилација правоугаоне плоче од материјала са особинама пужења и за случај зглобно везаних ивица контуре може се написати у облику:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{T}_{mn}(t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (89)$$

у коме је $\mathbf{T}_{mn}(t)$ сопствена функција времена облика (83). Коначно за решење парцијалне фракционог реда диференцијалне једначине трансверзалних осцилација танке правоугаоне плоче (средње површи плоче) (69), којој су придружени одговарајући гранични услови (86), добијамо у облику:

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathbf{T}_{0nm} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \omega_{0nm}^{2i} t^{2i} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} \frac{\omega_{0nm}^{2j} t^{-\alpha j}}{\omega_{0nm}^{2j} \Gamma(2i+1-\alpha j)} \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{\mathbf{T}}_{0nm} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \omega_{0nm}^{2i} t^{2i-1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} \frac{\omega_{0nm}^{-2j} t^{-\alpha j}}{\omega_{0nm}^{2j} \Gamma(2i+2-\alpha j)} \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (89)
 \end{aligned}$$

У коме су \mathbf{T}_{0mn} и $\dot{\mathbf{T}}_{0mn}$ интегралне константе које се одређују из почетних услова.

4. 8* . Нумерички експеримент и резултати.

Користећи добијене аналитичке изразе за сопствене функције времена $\mathbf{T}_{nm}(t)$ са одговарајућим партикуларним решењима, начинили смо нумерички експеримент за карактеристичне случајеве и односе параметара плоче, као и коефицијент α својстава пужења материјала плоче који су приказани на сликама приложеним у раду.

На слици 3. се види резултат нумеричке симулације и графичке презентације модова решења, који је аналоган са онима који су добијени за модове трансверзалних осцилација греде. Приказане су површи функције времена $T(t, \alpha)$ за раличите кинетичке параметре плоче и параметре материјала плоче, која трансверзално осцилује у интервалу $0 \leq \alpha \leq 1$: \mathbf{a}^* за $\left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}}\right) = 1$; \mathbf{b}^* за $\left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}}\right) = \frac{1}{4}$; in \mathbf{c}^* за $\left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}}\right) = \frac{1}{3}$; in \mathbf{d}^* за $\left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}}\right) = 3$.

И на слици 4. се види резултат нумеричке симулације и графичке презентације модова решењам који је аналоган са онима који су добијени за модове трансверзалних осцилација греде. Приказане су површи функције времена $T(t, \alpha)$, као и фамилије кривих за раличите кинетичке параметре плоче и параметре материјала плоче, која трансверзално осцилује у интервалу $0 \leq \alpha \leq 1$: \mathbf{a}^* и \mathbf{c}^* за $\left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}}\right) = 1$; \mathbf{b}^* и \mathbf{d}^* за $\left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}}\right) = \frac{1}{4}$; \mathbf{e}^* за

$\left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}}\right) = \frac{1}{3}$; и \mathbf{f}^* за for $\left(\frac{\omega_{\alpha\alpha}}{\omega_{0x}}\right) = 3$.

Слике 3 и 4 наведене у раду су урађене за случај трансверзалних осцилација греде, али се из аналогije види да су идентични и за случајеве осцилација плоча.

Закључно у овом параграфу, истичемо да је постављена нова теорија и изведене одговарајуће конститутивне релације за стање напона и стање деформација и осцилација плоче од материјала са особинама пужења, које су изражене изводима рационалног реда. Детаљни резултати се налазе у цитираним радпвима аутора и једном броју радова који су у процесу рецензија за могуће публикавање у часописима. Својства материјала плоче описана конститутивним релацијама напон- деформација које садрже изводе нецелог реда по времену у постављеној теорији не утичу на сопствене амплитудне функције, већ само на сопствене одговарајуће функције времена, при чему се не јавља спрезање реономних модова осциловања. Особина пузања материјала плоче уводи стање квази-статичке равнотеже плоче, док код трансверзалних осцилација плоче доводи до измене периодичких осцилаторних модова у модове "пузећих" својстава.

За постављени модел плоче са особинама пужења материјала изведени су изрази за компоненте тензора напона, као и за трансверзалне силе и моменте савијања и моменте увијања у попречним пресецима плоче.

Из добијених аналитичких израза и нумеричких резултата визуализације за трансверзалне осцилације плоче од материјала са особиним пужења описаном конститутивном релацијом која садржи изводе нецелог, рационалног реда, показали смо да та својства утичу на промену сопствене функције времена, али не и на сопствену амплитудну функцију, која зависи од облика граничних услова.

5. ХИБРИДНИ СИСТЕМИ СПРЕГНУТЕ ДВЕ ПЛОЧЕ СА ОСОБИНАМА ПУЖЕЊА.

5.1* Теоријска формулација задатка и главне једначине хибридног система спрегнуте две плоче.

Претпоставимо да су обе плоче хибридног система танке, хомогене и изотропне од материјала са особинама пужења, као што је проучена плоча у претходном параграфу III, и да обе задовољавају услове 1-3 побројане на почетку параграфа III.1*..

Сада усмеримо нашу пажњу на сендвич, хибридни систем, који се састоји од две спрегнуте плоче једнаких контура, свака висине по h_i , $i=1,2$, модула еластичности E_i и E_{i0} , Poisson-овог коефицијента попречне контракције μ_i и модула смицања G_i , као и густином материјала плоче ρ_i , $i=1,2$. Дебљине плоча су у правцу осе Z и постављене као на слици 7, једна изнад друге, тако да им се контуре поклапају при ортогоналном пројектовању у правцу осе Z . Обе плоче задовољавају граничне услове истог облика. Плоче су међусобно спојене слојем са својствима пужења у правцу осе Z који је састављен од хомогено расподељених лаких стандардних елемената са својствима пужења, који се описују конститутивним релацијама напон-деформација, које садрже изводе нецелог реда.

Координатни почеци два ортогонална система координата са паралелним осама смештени су у одговарајућим центрима маса на средњој површи плоча, или у теменима контуре плоча на средњој површи плоче, као што је то видљиво на слици 7. Нека су обе плоче подвргнуте расподељеним спољашњим трансверзалним одговарајућим оптерећењима $q_i(x, y, t)$, $i=1,2$ по спољашњим контурним површима плоча. Постављени проблем је одредити решење у аналитичком облику.

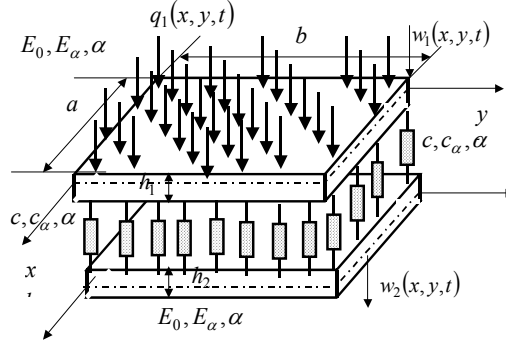
Користимо, као и у претходном проучавању осцилација једне плоче, Love-Kirchhoff-овљење претпоставке које смо већ побројали, а могу се наћи ближа објашњења у референцама [88, 89] Д. Рашковића (1965) и (1985) и на основу тога за разматрања ћемо користити трансверзална померања $w_i(x, y, t)$, $i=1,2$ тачака одговарајућих средњих површи плоча, редом горње и доње плоче, која зависе од координата x и y и времена t , као што је то прихваћено у претходном параграфу III.

Претпоставимо да је средња површ плоче у недеформисаном стању раван. Како смо претпоставили да су трансверзална померања тачака средњих површи плоча $w_i(x, y, t)$, $i=1,2$ мала у поређењу са дебљинама h_i , $i=1,2$ плоча. Усвојимо цилиндричне крутости

плоча у облику: $\mathfrak{D}_i = \frac{E_i h^3}{12(1-\mu^2)}$, $\mathfrak{D}_{i\alpha} = \frac{E_{i\alpha} h^3}{12(1-\mu^2)}$, $i=1,2$, сагласно објашњењима у

претходном параграфу, $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$ и $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ and $E_{\alpha x} = E_{\alpha y} = E_\alpha$ за материјал обеју плоча, које сматрамо хомогеним и изотропним. За стандардне лаке елементе слоја са особинама пужења усвојимо коефицијете крутости C и C_α , први за случај краткотрајног и наглог оптерећивања елемента, а други за случај дуготрајног оптерећивања елемента, а коефицијет пужења α , усвојимо исти као и за плоче, из интервала $0 \leq \alpha \leq 1$.

Сада користимо резултате из публикованих радова [38, 57] К. (Стевановић) Хедрих из 2003, за конститутивне релације напон-деформација изражене помоћу трансверзалног померања тачака средње површи плоче и за плочу и за елементе из слоја којим су спојене плоче.



Слика 7. Хибридни систем спрегнуте две плоче слојем са особинама пужења.

Даље, користећи резултате аутора из радова публикованих у периоду (2003-2008) и наведених у приложеном списку литературе, као и резултате приказане у претходним параграфима и поступак изводђења основних једначина динамичке равнотеже, и примењујући на сваку од плоча система појединачно и додајући утицај сила које се јављају у слоју при померању тачака обеју плоча $w_i(x, y, t)$, $i=1,2$ у трансверзалном правцу z осе на основу принципа динамичке равнотеже за сваки произвољни и одговарајући елемент плоче долазимо до двеју основних једначина динамичке равнотеже плоча и хибридног система у следећем облику:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_1(x, y, t)}{\partial t^2} + c_{(1)}^4 \left\{ (1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) [\Delta \Delta w_1(x, y, t)] \right\} - \\ & - a_{(1)}^2 \left\{ (1 + \kappa_\alpha^c \mathfrak{D}_t^\alpha) [w_2(x, y, t) - w_1(x, y, t)] \right\} = \tilde{q}_1(x, y, t) \\ & \frac{\partial^2 w_2(x, y, t)}{\partial t^2} + c_{(2)}^4 \left\{ (1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) [\Delta \Delta w_2(x, y, t)] \right\} + \\ & + a_{(2)}^2 \left\{ (1 + \kappa_\alpha^c \mathfrak{D}_t^\alpha) [w_2(x, y, t) - w_1(x, y, t)] \right\} = -\tilde{q}_2(x, y, t) \end{aligned} \quad (91)$$

у којима су коришћене следеће ознаке:

$$\begin{aligned} c_{(i)}^4 &= \frac{\mathfrak{D}_i}{\rho_i h_i} = \frac{E_0 h_i^3}{12 \rho_i h_i (1 - \mu^2)}, \quad \kappa_\alpha = \frac{E_\alpha}{E_0}, \quad \kappa_\alpha^c = \frac{c_\alpha}{c}, \\ a_{(i)}^2 &= \frac{c}{\rho_i h_i}, \quad \tilde{q}_i(x, y, t) = \frac{q_i(x, y, t)}{\rho_i h_i} \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (91^*)$$

Као што видимо систем (91) садржи две парцијалне фракционог реда диференцијалне једначине динамичке равнотеже сваке од плоча. Те једначине су спрегнуте и реолинеарног типа.

5. 2* Метода решавања система основних једначина динамике хибридног система две спрегнуте плоче слојем са особинама пужења.

Решења претходног система (91) који садржи две парцијалне фракционог реда диференцијалне једначине динамичке равнотеже хибридног система две спрегнуте плоче слојем са особинама пужења, као и у претходним параграфима користичемо прво Bernoulli-јеву методу партикуларних решења да би смо уростили задатак и свели исти на решавање система обичних фракционог рефа диференцијалних једначина. Зато, решење претходног система (91) парцијалних фракционог реда диференцијалних једначина одређујемо примњујући Bernoulli-јеву методу партикуларних интеграла претпостављајући трансверзална померања $w_i(x, y, t)$, $i=1,2$ тачака одговарајућих неутралних средњих површи плоча у облику производа по две финкције, од којих једна $\mathbf{W}_{(i)}(x, y)$, $i=1,2$ зависи само од координата x и y , а друга $T_{(i)}(t)$, $i=1,2$ само од времена t :

$$w_{(i)}(x, y, t) = \mathbf{W}_{(i)}(x, y) \Gamma_{(i)}(t), \quad i=1,2 \quad (92)$$

За почетак, претпостављена решења (92) уносимо у једначине система (91) за случај сопствених осцилација система, када су $q_i(x, y, t) = 0$, $i=1,2$ спољашња оптерећења једнака нули и као резултат добијамо следећи систем:

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_{(1)}(t) + c_{(1)}^4 \left\{ (1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) [T_{(1)}(t)] \right\} \frac{\Delta \Delta \mathbf{W}_{(1)}(x, y)}{\mathbf{W}_{(1)}(x, y)} - \\ & - a_{(1)}^2 \left\{ (1 + \kappa_\alpha^c \mathfrak{D}_t^\alpha) \left[\frac{\mathbf{W}_{(2)}(x, y)}{\mathbf{W}_{(1)}(x, y)} T_{(2)}(t) - T_{(1)}(t) \right] \right\} = 0 \\ & \ddot{T}_{(2)}(t) + c_{(2)}^4 \left\{ (1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) [T_{(2)}(t)] \right\} \frac{\Delta \Delta \mathbf{W}_{(1)}(x, y)}{\mathbf{W}_{(1)}(x, y)} + \\ & + a_{(2)}^2 \left\{ (1 + \kappa_\alpha^c \mathfrak{D}_t^\alpha) \left[\frac{\mathbf{W}_{(2)}(x, y)}{\mathbf{W}_{(1)}(x, y)} T_{(2)}(t) - T_{(1)}(t) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (83)$$

Анализом једначина претходног система (93), са циљем раздвајања променљивих, долазимо до следећег закључка, да је целисходно из претходног системна раздвојити три једначине и то у један стистем који садржи две обичне фраксиног диференцијалне једначине по функцијама $T_{(i)}(t)$, $i=1,2$ времена t у облику:

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_{(1)}(t) + \omega_{(1)}^2 (1 + \tilde{\kappa}_{\alpha(1)} \mathfrak{D}_t^\alpha) \Gamma_{(1)}(t) = 0 \\ & \ddot{T}_{(2)}(t) + \omega_{(2)}^2 (1 + \tilde{\kappa}_{\alpha(2)} \mathfrak{D}_t^\alpha) \Gamma_{(2)}(t) = 0 \end{aligned} \quad (94)$$

у коме су уведене ознаке $\omega_{(i)}^2 = k_{(i)}^4 c_{(i)}^4 + a_{(i)}^2$; $\tilde{\kappa}_{\alpha(i)} = \frac{k_{(i)}^4 c_{(i)}^2 \kappa_\alpha + a_{(i)}^2 \kappa_\alpha^c}{k_{(i)}^2 c_{(i)}^2 + a_{(i)}^2}$ из којих су

искључени чланови спрезања и

a* две парцијалне диференцијалне једначине по сопственим амплитудним

функцијама $\mathbf{W}_{(i)}(x, y)$, $i=1,2$ које зависе само од координата x и y , облика:

$$\Delta \Delta \mathbf{W}_{(i)}(x, y) - k_{(i)}^4 \mathbf{W}_{(i)}(x, y) = 0, \quad \mathbf{W}_{(1)}(x, y) = \mathbf{W}_{(2)}(x, y) \quad (95)$$

или

b^* две парцијалне диференцијалне једначине по сопственим амплитудним функцијама $\mathbf{W}_{(i)}(r, \varphi)$, $i=1,2$ које зависе само од поларно-цилиндричких координата r и φ , облика:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \mathbf{W}_{(i)}(r, \varphi) - k_{(i)}^4 \mathbf{W}_{(i)}(r, \varphi) &= 0, \quad \mathbf{W}_{(1)}(r, \varphi) = \mathbf{W}_{(2)}(r, \varphi) \\ \omega_{(i)}^2 &= k_{(i)}^4 c_{(i)}^4 + a_{(i)}^2, \quad \omega_{(i)}^2 = k_{(i)}^4 c_{(i)}^4 + a_{(i)}^2 \end{aligned} \quad (96)$$

у којима су уведени следећи сопствени карактеристични бројеви:

$$\omega_{(i)}^2 = k^4 c_{(i)}^4 + a_{(i)}^2 \quad \text{и} \quad \omega_{(i)\alpha}^2 = \tilde{\kappa}_{(i)\alpha} \omega_{(i)}^2 = k^4 \kappa_\alpha c_{(i)}^4 + a_{(i)}^2 \kappa_{(i)\alpha}^c \quad (97)$$

Анализом решења парцијалних диференцијалних једначина (95) и (96). Која су позната из литературе и која смо за неке случајеве приказали у претходном параграфу, III.6* and III. 7*, закључујемо да је решење ових једначина за обе плоче система исто, јер су плоче истог облика и са истим типом граничних услова. И дају, за случај базбог система, без спрезања по функцијама $T_{(i)}(t)$, $i=1,2$ времена t , исте карактеристичне бројеве и одговарајуће сопствене кружне фреквенције. Зато у претпостављеном решењу (92) можемо узети једну те исту сопствену амплитудну функцију за обе плоче $\mathbf{W}_{(1)nm}(x, y) = \mathbf{W}_{(2)nm}(x, y)$, $i=1,2$, $n, m=1,2,3,4, \dots, \infty$, а обе задовољавају услове ортогоналности:

$$\int_0^a \int_0^b \mathbf{W}_{(i)mn}(x, y) \mathbf{W}_{(i)sr}(x, y) dx dy = \begin{cases} 0 & nm \neq sr \\ v_{mnm} & nm = sr \end{cases} \quad (98)$$

$$i=1,2, \quad n, m=1,2,3,4, \dots, \infty, \quad s, r=1,2,3,4, \dots, \infty$$

Које није тешко извести из система парцијалних диференцијалних једначина (95) или (96) за различите парове nm и sr .

Такође, функције времена $\mathbf{T}_{(i)nm}(t)$, $i=1,2$, $n, m=1,2,3,4, \dots, \infty$ из основних, раздвојених обичних фракционог реда диференцијалних једначина користећи решења из претходних параграфа у виду реда облика (67) можемо написати у облику:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{(i)nm}(t) &= \mathbf{T}_{0(i)nm} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \omega_{(i)cnm}^{2i} t^{2i} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} \frac{\omega_{(ii)cnm}^{2j} t^{-cj}}{\omega_{(i)nm}^{2j} \Gamma(2i+1-cj)} + \\ &+ \mathbf{T}_{0(i)nm} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \omega_{(i)cnm}^{2i} t^{2i-1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} \frac{\omega_{(i)cnm}^{-2j} t^{-cj}}{\omega_{(i)nm}^{2j} \Gamma(2i+2-cj)} \end{aligned} \quad (98)$$

$$i=1,2, \quad n, m=1,2,3,4, \dots, \infty$$

у коме су ознаке следеће:

$$\omega_{(i)nm}^2 = k_{nm}^4 c_{(i)}^4 + a_{(i)}^2 \quad \text{and}$$

$$\omega_{(i)cnm}^2 = \tilde{\kappa}_{(i)cnm} \omega_{(i)nm}^2 = k_{nm}^4 \kappa_\alpha c_{(i)}^4 + a_{(i)}^2 \kappa_{(i)\alpha}^c, \quad i=1,2, \quad n, m=1,2,3,4, \dots, \infty \quad (100)$$

које сардже карактеристичне бројеве k_{nm} који су непознати и које треба одредити из конкретних граничних услова, који треба да буду задовољени на контурама плоча за сваки

сопствени амплитудни облик.

Сада се враћамо на систем спрегнутих једначина (91) да би смо одредитли његова решења, усвајамо за сопствене амплитудне функције $\mathbf{W}_{(i)nm}(x, y)$, $\mathbf{W}_{(1)nm}(x, y) = \mathbf{W}_{(2)nm}(x, y)$ $i = 1, 2$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ и решење претпостављамо у виду реда по тим сопственим амплитудним функцијама, као познатим и непознатим функцијама времена $T_{(i)nm}(t)$, $i = 1, 2$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ које зависе од времена t у облику:

$$w_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{W}_{(1)nm}(x, y) T_{(1)nm}(t) \quad (11)$$

$$w_2(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{W}_{(2)nm}(x, y) T_{(2)nm}(t). \quad (112)$$

у којима су сопствене амплитудне функције $\mathbf{W}_{(i)nm}(x, y)$, $\mathbf{W}_{(1)nm}(x, y) = \mathbf{W}_{(2)nm}(x, y)$ $i = 1, 2$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ исте као и за случај решавања основних неспрегнутих једначина из претходног параграфа III.6* and III. 7*. После уношења претпостављених репења (111) и (112) у систем (91) и множењем једначина тог система са $\mathbf{W}_{(i)sr}(x, y) dx dy$ и интегралења по средњој површи плоче и узимања у обзир услова ортогоналности (98) и анализе чланова добијених једначина за различите комплете граничних услова ослањања полча добијамо систем од две обичне фракционог реда диференцијалне једначине по непознатим сопственим функцијама $T_{(i)nm}(t)$, $i = 1, 2$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ времена t у следећем облику:

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_{(1)nm}(t) + \omega_{(1)nm}^2 (1 + \tilde{\kappa}_{\alpha(1)nm} \mathfrak{D}_t^\alpha) T_{(1)nm}(t) - \\ & - (a_{(1)}^2 + a_{(1)\alpha nm}^2 \mathfrak{D}_t^\alpha) T_{(2)nm}(t) = f_{(1)nm}(t) \\ & \ddot{T}_{(2)nm}(t) + \omega_{(2)nm}^2 (1 + \tilde{\kappa}_{\alpha(2)nm} \mathfrak{D}_t^\alpha) T_{(2)nm}(t) - \\ & - (a_{(2)}^2 + a_{(2)\alpha nm}^2 \mathfrak{D}_t^\alpha) T_{(1)nm}(t) = -f_{(2)nm}(t) \end{aligned} \quad (113)$$

$n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$

у коме су познате функције $f_{(1)nm}(t)$ и $f_{(2)nm}(t)$ одређене следећом изразима:

$$f_{(1)nm}(t) = \frac{\int_0^a \int_0^b \tilde{q}_1(x, y, t) \mathbf{W}_{(1)nm}(x, y) dx dy}{\int_0^a \int_0^b [\mathbf{W}_{(1)nm}(x, y)]^2 dx dy}$$

$$f_{(2)nm}(t) = \frac{\int_0^a \int_0^b \tilde{q}_2(x, y, t) W_{(2)nm}(x, y) dx dy}{\int_0^a \int_0^b [W_{(2)nm}(x, y)]^2 dx dy} \quad (114)$$

који зависе од сопљашњих површинских оптерећења плоча.

Добијени систем (113) спрегнутих обичних фракционог реда диференцијалних једначина по непознатим сопственим функцијама $T_{(i)nm}(t)$, $i=1,2$, $n, m=1,2,3,4,\dots,\infty$ времена y , могу се решавати Laplace-овом трансформацијом. После примене Laplace-ове трансформације на тај систем и затим решавањем по непознатим Laplace-овим трансформацијама $\mathfrak{L}[T_{(i)nm}(t)]$ сопствених функција $T_{(i)nm}(t)$, $i=1,2$, $n, m=1,2,3,4,\dots,\infty$ времена, добијамо следеће изразе у комплексном домену променљиве p :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[T_{(1)nm}(t)] &= \frac{1}{\Delta_{nm}(p)} [pT_{(1)nm}(0) + \dot{T}_{(1)nm}(0) + \mathfrak{L}[f_{(1)nm}(t)]] \cdot \left\{ p^2 + \omega_{(2)nm}^2 \left[1 + \frac{\omega_{(2)nm}^2}{\omega_{(2)nm}^2} \mathbf{R}(p) \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{\Delta_{nm}(p)} [pT_{(2)nm}(0) + \dot{T}_{(2)nm}(0) - \mathfrak{L}[f_{(2)nm}(t)]] \cdot \left\{ a_{(1)}^2 \left[1 + \frac{a_{(1)}^2}{\omega_{(1)}^2} \mathbf{R}(p) \right] \right\} \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[T_{(2)nm}(t)] &= \frac{1}{\Delta_{nm}(p)} [pT_{(2)nm}(0) + \dot{T}_{(2)nm}(0) - \mathfrak{L}[f_{(2)nm}(t)]] \cdot \left\{ p^2 + \omega_{(1)nm}^2 \left[1 + \frac{\omega_{(1)nm}^2}{\omega_{(1)nm}^2} \mathbf{R}(p) \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{\Delta_{nm}(p)} [pT_{(1)nm}(0) + \dot{T}_{(1)nm}(0) + \mathfrak{L}[f_{(1)nm}(t)]] \cdot \left\{ a_{(2)}^2 \left[1 + \frac{a_{(2)}^2}{\omega_{(2)}^2} \mathbf{R}(p) \right] \right\} \end{aligned} \quad (116)$$

Детерминанта $\Delta_{nm}(p)$ претходног система (113) у комплексном домену променљиве p из кога смо одредили изразе (115) и (116), је облика:

$$\Delta_{nm}(p) = \begin{vmatrix} p^2 + \omega_{(1)nm}^2 \left[1 + \frac{\omega_{(1)nm}^2}{\omega_{(1)nm}^2} \mathbf{R}(p) \right] & -a_{(1)}^2 \left[1 + \frac{a_{(1)}^2}{\omega_{(1)}^2} \mathbf{R}(p) \right] \\ -a_{(2)}^2 \left[1 + \frac{a_{(2)}^2}{\omega_{(2)}^2} \mathbf{R}(p) \right] & p^2 + \omega_{(2)nm}^2 \left[1 + \frac{\omega_{(2)nm}^2}{\omega_{(2)nm}^2} \mathbf{R}(p) \right] \end{vmatrix} \neq 0 \quad (117)$$

у којој је $\mathfrak{L}[\mathfrak{L}_t^\alpha [T_{(i)nm}(t)]] = \mathbf{R}(p) \mathfrak{L}[T_{(i)nm}(t)]$ Laplace-ова трансформација извода рационалног реда α , $\frac{d^\alpha T_{(i)nm}(t)}{dt^\alpha}$ за $0 \leq \alpha \leq 1$. За усвојени материјал плоче са особиним пужења материјала плочета Laplace-ова трансформација је облика:

$$\mathfrak{L}\left[\mathfrak{D}_t^\alpha [T_{(i)nm}(t)]\right] = \mathbf{R}(p)\mathfrak{L}[T_{(i)nm}(t)] - \frac{d^{\alpha-1}}{dt^{\alpha-1}} T_{(i)nm}(0) = p^\alpha \mathfrak{L}[T_{(i)nm}(t)] - \frac{d^{\alpha-1}}{dt^{\alpha-1}} T_{(i)nm}(0) \quad (118)$$

за усвојене почетне услове:

$$\left. \frac{d^{\alpha-1} T_{(i)nm}(t)}{dt^{\alpha-1}} \right|_{t=0} = 0 \quad (118a)$$

Сада за Лаплас-ове трансформације $\mathfrak{L}[T_{(i)nm}(t)]$ сопствених функција $T_{(i)nm}(t)$, $i = 1, 2$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ времена у у комплексном домену променљиве p добијамо следеће изразе:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[T_{(1)nm}(t)] &= \frac{1}{\Delta_{nm}(p)} p^2 [pT_{(1)nm}(0) + \dot{T}_{(1)nm}(0) + \mathfrak{L}[f_{(1)nm}(t)]] \cdot \left\{ 1 + \frac{\omega_{(2)\alpha nm}^2}{p^2} \left[p^\alpha + \frac{\omega_{(2)nm}^2}{\omega_{(2)\alpha nm}^2} \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{\Delta_{nm}(p)} [pT_{(2)nm}(0) + \dot{T}_{(2)nm}(0) - \mathfrak{L}[f_{(2)nm}(t)]] \cdot \left\{ a_{(1)\alpha}^2 \left[p^\alpha + \frac{a_{(1)}^2}{\omega_{(1)\alpha}^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (119)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[T_{(2)nm}(t)] &= \frac{1}{\Delta_{nm}(p)} p^2 [pT_{(2)nm}(0) + \dot{T}_{(2)nm}(0) - \mathfrak{L}[f_{(2)nm}(t)]] \cdot \left\{ 1 + \frac{\omega_{(1)\alpha nm}^2}{p^2} \left[p^\alpha + \frac{\omega_{(1)nm}^2}{\omega_{(1)\alpha nm}^2} \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{\Delta_{nm}(p)} [pT_{(1)nm}(0) + \dot{T}_{(1)nm}(0) + \mathfrak{L}[f_{(1)nm}(t)]] \cdot \left\{ a_{(2)\alpha}^2 \left[p^\alpha + \frac{a_{(2)}^2}{\omega_{(2)\alpha}^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (119a)$$

у коме је детерминанта $\Delta_{nm}(p)$ претходног система (113) у комплексном домену променљиве p и за усвојени материјал плоче са особиним пужења материјала плоче, из кога смо одредили изразе (119) и (119a) је облика:

$$\Delta_{nm}(p) = \begin{vmatrix} p^2 \left\{ 1 + \frac{\omega_{(1)\alpha nm}^2}{p^2} \left[p^\alpha + \frac{\omega_{(1)nm}^2}{\omega_{(1)\alpha nm}^2} \right] \right\} & - a_{(1)\alpha}^2 \left[p^\alpha + \frac{a_{(1)}^2}{\omega_{(1)\alpha}^2} \right] \\ - a_{(2)\alpha}^2 \left[p^\alpha + \frac{a_{(2)}^2}{\omega_{(2)\alpha}^2} \right] & p^2 \left\{ 1 + \frac{\omega_{(2)\alpha nm}^2}{p^2} \left[p^\alpha + \frac{\omega_{(2)nm}^2}{\omega_{(2)\alpha nm}^2} \right] \right\} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{nm}(p) &= p^4 \left\{ 1 + \frac{\omega_{(1)\alpha nm}^2}{p^2} \left[p^\alpha + \frac{\omega_{(1)nm}^2}{\omega_{(1)\alpha nm}^2} \right] \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{\omega_{(2)\alpha nm}^2}{p^2} \left[p^\alpha + \frac{\omega_{(2)nm}^2}{\omega_{(2)\alpha nm}^2} \right] \right\} - \\ &- a_{(1)\alpha}^2 a_{(2)\alpha}^2 \left[p^\alpha + \frac{a_{(1)}^2}{\omega_{(1)\alpha}^2} \right] \left[p^\alpha + \frac{a_{(2)}^2}{\omega_{(2)\alpha}^2} \right] \end{aligned} \quad (120a)$$

5. 3* Осцилаторни модови у динамици хомогеног хибридног сендвич система две спрегнуте плоче од материјала са својствима пужења.

Размотримо систем (113) од две обичне фракционог реда диференцијалне

једначине по непознатим сопственим функцијама $T_{(i)nm}(t)$, $i=1,2$, $n,m=1,2,3,4,\dots\infty$ времена t за случај који одговара динамици хомогеног хибридног сендвич система две спрегнуте плоче од материјала са својствима пужења, увођењем следећих нових координата $\xi_{(s)nm}(t)$, $s=1,2$:

$$\begin{aligned}\xi_{(1)nm}(t) &= \frac{1}{2} \{T_{(1)nm}(t) + T_{(2)nm}(t)\} \\ \xi_{(2)nm}(t) &= \frac{1}{2} \{T_{(1)nm}(t) - T_{(2)nm}(t)\}\end{aligned}\quad (121)$$

које представљају главне координате одговарајућег линеарног система диференцијалних једначина, које одговарају систему обичних фракционог реда диференцијалним једначинама (113). Увођењем тих нових координата у систем (113). Добијамо следећи систем:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_{(1)nm}(t) + \omega_{(1)nm}^2 (1 + \tilde{\kappa}_{\alpha(1)nm} \mathfrak{D}_t^\alpha) \xi_{(1)nm}(t) - \\ - (a_{(1)}^2 + a_{(1)\alpha nm}^2 \mathfrak{D}_t^\alpha) \xi_{(1)nm}(t) &= \frac{1}{2} [f_{(1)nm}(t) + f_{(2)nm}(t)] \\ \ddot{\xi}_{(2)nm}(t) + \omega_{(1)nm}^2 (1 + \tilde{\kappa}_{\alpha(1)nm} \mathfrak{D}_t^\alpha) \xi_{(2)nm}(t) - \\ - (a_{(1)}^2 + a_{(1)\alpha nm}^2 \mathfrak{D}_t^\alpha) \xi_{(2)nm}(t) &= \frac{1}{2} [f_{(1)nm}(t) - f_{(2)nm}(t)]\end{aligned}\quad (122)$$

који садржи две неспрегнуте обичне фракционог реда диференцијалне једначине, које представљају парцијалне фракционе осцилаторе.

Одговарајући линеарни систем диференцијалних једначина систему (122) има сопствене кружне фреквенције $\omega_{1,nm}^2 = \omega_{(1)nm}^2 - a_{(1)}^2$ и $\omega_{2,nm}^2 = \omega_{(1)nm}^2 + a_{(1)}^2$ и одговарајућа решења могу бити изражена помоћу главних координата $\xi_{(1)nm}(t)$ и $\xi_{(2)nm}(t)$ линеарног система у облику $T_{(1)nm}(t) = \xi_{(1)nm}(t) + \xi_{(2)nm}(t)$ и $T_{(2)nm}(t) = \xi_{(1)nm}(t) - \xi_{(2)nm}(t)$, које се могу написати као функције времена са одговарајућим сопственим кружним фреквенцијама: $\xi_{(1)nm}(t) = C_{(1)nm} \cos(\omega_{1,nm} t + \alpha_{(1)nm})$ и $\xi_{(2)nm}(t) = C_{(2)nm} \cos(\omega_{2,nm} t + \alpha_{(2)nm})$ и које садрже серију од четири интеграционе константе $C_{(s)nm}$ и $\alpha_{(s)nm}$, $s=1,2$ за сваки од модова nm :

Увођењем ознака за сопствене кружне фреквенције $\omega_{1,nm}^2 = \omega_{(1)nm}^2 - a_{(1)}^2$ и $\omega_{2,nm}^2 = \omega_{(1)nm}^2 + a_{(1)}^2$ одговарајућег линеарног система, и аналоге за систем фракционог реда диференцијалних једначина $\omega_{1\alpha, nm}^2 = \omega_{(1)\alpha nm}^2 - a_{(1)\alpha}^2$ и $\omega_{2\alpha, nm}^2 = \omega_{(1)\alpha nm}^2 + a_{(1)\alpha}^2$ систем (122) парцијалних осцилатора фракционог реда исте можемо написати у облику:

$$\ddot{\xi}_{(1)nm}(t) + (\omega_{1, nm}^2 + \omega_{1\alpha, nm}^2 \mathfrak{D}_t^\alpha) \xi_{(1)nm}(t) = \frac{1}{2} [f_{(1)nm}(t) - f_{(s)nm}(t)]$$

$$\ddot{\xi}_{(2)nm}(t) + (\omega_{2, nm}^2 + \omega_{2\alpha, nm}^2 \mathfrak{D}_t^\alpha) [\xi_{(2)nm}(t)] = \frac{1}{2} [f_{(1)nm}(t) + f_{(s)nm}(t)] \quad (123)$$

у којима су сада $\xi_{(1)nm}(t)$ и $\xi_{(2)nm}(t)$ непознате главне координате фракционих парцијалних осцилатора на које се распао систем по увођењу нових координата припадајућих сваком сопственом амплитудном nm -моду трансверзалних осцилација сендвич система две плоче. За посматрани случај сваки мод поседује две такве главне координате и два суб-мода, $\xi_{(1)nm}(t)$ и $\xi_{(2)nm}(t)$, у оквиру мода хибридног система. Из система (122а) могуће је закључити, да за осцилације под утицајем својстава пужења материјала плоча и спрежућег слоја, сваки мод осциловања који одговара сопственој амплитудној функцији у посматраном случају, поседује два субмода $\xi_{(1)nm}(t)$ и $\xi_{(2)nm}(t)$ облика решења парцијалних осцилатора обичне фракционог реда диференцијалне једначине (11) или (40) или (74), као што је то случај за припадајућу једначину која се односи на један мод осциловања једне плоче или греде, само са одговарајућим сопственим кружним фреквенцијама и аналозима осциловања за својства пужења материјала.

Сада можемо закључити да решење система (122а) обичних фракционог реда диференцијалних једначина за случај да нема спољашњег површинског трансверзалног оптерећења по плочама, када је $f_{(1)nm}(t) = 0$ и $f_{(2)nm}(t) = 0$, у посматраном случају састоје од линеарних комбинација субмодова $\xi_{(1)nm}(t)$ и $\xi_{(2)nm}(t)$ у сваком сопственом амплитудном nm -моду. Тада се за тај случај сопствене функције времена могу написати у облицима $T_{(1)nm}(t) = \xi_{(1)nm}(t) + \xi_{(2)nm}(t)$ и $T_{(2)nm}(t) = \xi_{(1)nm}(t) - \xi_{(2)nm}(t)$ у сваком сопственом амплитудном nm -моду, и за које су сопствени бројеви $\omega_{i, nm}$, $i = 1, 2$ и $\omega_{i\alpha, nm}$, $i = 1, 2$ које треба заменити у израз (99) и у виду степених редова по времену t добити изразе за $\xi_{(1)nm}(t)$ и $\xi_{(2)nm}(t)$ за сваки nm -мод.

5. 4* Закључна разматрања о својствима осциловања система две спрегнуте плоче са својствима пужења материјала.

Две спрегнуте парцијалне фракционог реда диференцијалне једначине трансверзалних осцилација система две спрегнуте плоче са својствима пужења материјала су изведене и анализирани модови и својства решења. Коришћене су класичне методе, Bernoulli-јева метода партикуларних интеграла и метода Laplace-ове трансформације.

Laplace-ове трансформације $\mathfrak{L}[T_{(i)nm}(t)]$ сопствених функција $T_{(i)nm}(t)$, $i = 1, 2$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ времена у комплексном домену променљиве p су одређене помоћу израза (115) и (116) или (119) и (119а), док су за случај хомогеног система ти изрази облика:

$$\mathfrak{L}\{T_{(i)nm}(t)\} = \frac{pT_{0(i)nm} + \dot{T}_{0(i)nm}}{p^2 \left[1 + \frac{\omega_{(i)cnm}^2}{p^2} \left(p^\alpha + \frac{\omega_{(i)nm}^2}{\omega_{(i)cnm}^2} \right) \right]} \quad i = 1, 2, n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty \quad (123)$$

са детерминантим $\Delta_{nm}(p)$ облика (120) или (120а) односно за хомогени систем се своди на облик:

$$\Delta_{(i)nm}(p) = p^2 \left[1 + \frac{\omega_{(i)cnm}^2}{p^2} \left(p^\alpha + \frac{\omega_{(i)nm}^2}{\omega_{(i)cnm}^2} \right) \right] \quad i = 1, 2, n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty \quad (124)$$

Добијена аналитичка решења показују и ти последњи изрази (123) и (124) када је $\alpha = 0$, из којих се може закључити да инверзи дају сасвим периодичка решења. У случају да је $\alpha \neq 0$ сваки мод осциловања хибридног система има два субмода који личе на опадајуће периодичне, поремећене својствима пузања материјала плоча и спрежућег слоја у сваком облику $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ сопствене амплитудне функције.

6 ХИБРИДНИ СИСТЕМ СПРЕГНУТОГ ВЕЋЕГ БРОЈА ПЛОЧА СЛОЈЕВИМА МАТЕРИЈАЛА СА ОСОБИНАМА ПУЗАЊА ПЛОЧА И ЕЛЕМЕНАТА.

6. 1* Теоријка формулација задатка и главне једначине хибридног система већег броја плоча слојевима са особинама пужења материјала плоча и елемената.

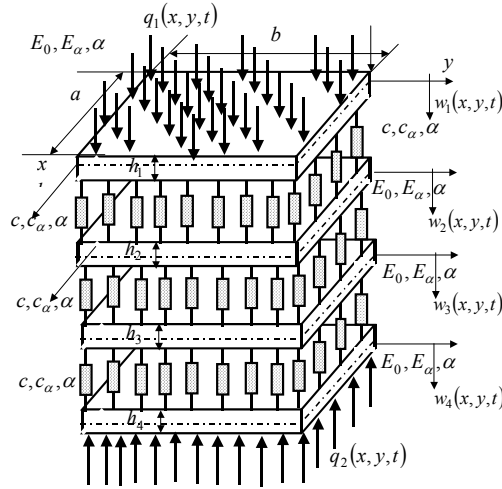
За случај проучавања осцилација хибридног система спрегнутог већег броја плоча слојевима са особинама пужења материјала плоча и елемената, претпоставићемо да су плоче танке и да попречни пресеци сваке од плоча не трпе депланације. Такође, претпоставимо да су све плоче хибридног система танке, хомогене и изотропне од материјала са особинама пужења, као што је проучена плоча у претходном параграфу 4 и да све плоче задовољавају услове 1-3 побројане на почетку параграфа 4.1*..

Сада усмеримо нашу пажњу на сендвич, хибридни систем, који се састоји од M спрегнутих плоча једнаких контура, свака висине по h_i , $i = 1, 2, \dots, M$, модула еластичности E_i и E_{i0} , Poisson-овог коефицијента попречне контракције μ_i и модула смицања G_i , као и густиним материјала плоче ρ_i , $i = 1, 2, \dots, M$. Дебљине плоча су у правцу осе z и постављене ка на слици 8, једна изнад друге, редом, тако да им контуре поклапају при ортогоналном пројектовању у правцу осе z . Све плоче задовољавају граничне услове истог облика. Плоче су међусобно спојене слојевима са својствима пужења у правцу осе z који су састављени, сваки појединачно, од хомогено расподељених лаких стандардних елемената са својствима пужења, које се описује конститутивним релацијама напон-деформација, које садрже изводе нецелог реда.

Координатни почаци M ортогоналних система координата са паралелним осама смештени су одговарајућим центрима маса на средњој површи плоча, или у теменима контуре плоча на средњој површи плоче, као што је то видљиво на слици 8. Нека су све плоче подвргнуте расподељеним спољашњим трансверзалним одговарајућим

оптерећењима $q_i(x, y, t)$, $i = 1, 2, \dots, M$ по спољашњим контурним површима плоча. Постављени проблем је одредити решење у аналитичком облику.

Користимо, као и у претходном проучавању осцилација једне плоче, Love-Kirchhoff-овље преетпоставке које смо већ побројали, а могу се наћи ближа објашњења у референцама [88, 89] Д. Рашковића (1965) и (1985) и на основу тога за разматрања ћемо користити трансверзална померања $w_i(x, y, t)$, $i = 1, 2, \dots, M$ тачака одговарајућих средњих површи плоча, редом по редуследу спрезања од горње плоче ка најнижој доњој плочи, која зависе од координата x и y и времена t , као што је то прихваћено у претходном параграфу Ш.



Слика 8. Хибридни систем спрегнутог већег броја плоча слојевима са особинама пужења материјала плоча и елемената.

Претпоставимо да је средња површ сваке од плоча у недеформисаном стању, раван. Како смо претпоставили да су трансверзална померања тачака средњих површи плоча $w_i(x, y, t)$, $i = 1, 2, \dots, M$ мала у поређењу са дебелинама h_i , $i = 1, 2, \dots, M$ плоча, то

усвојимо цилиндричне крутости плоча у облику: $\mathfrak{D}_i = \frac{\mathbf{E}_i h^3}{12(1 - \mu^2)}$, $\mathfrak{D}_{i\alpha} = \frac{\mathbf{E}_{i\alpha} h^3}{12(1 - \mu^2)}$,

$i = 1, 2, \dots, M$, сагласно објашњењима у претходном параграфу, $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$ и $\mathbf{E}_{0x} = \mathbf{E}_{0y} = \mathbf{E}_0$ and $\mathbf{E}_{\alpha x} = \mathbf{E}_{\alpha y} = \mathbf{E}_\alpha$ за материјал свих спрегнутих плоча, које сматрамо хомогеним и изотропним. За стандардне лаке елементе слојева са особинама пужења усвојимо коефицијенте крутости c и c_α , први за случај краткотрајног и наглог оптерећивања елемента, а други за случај дуготрајног оптерећивања елемента, а коефицијет пужења α , усвојимо исти као и за плоче, из интервала $0 \leq \alpha \leq 1$.

Сада користимо резултате из публикованих радова [38, 57] К. (Стевановић) Хедрих

из 2003, за конститутивне релације напон-деформација изражене помоћу трансверзалног померања тачака средње површи плоче и за плочу и за елементе из слоја којим су спојене плоче. Даље, користећи резултате аутора из радова публикованих у периоду (2003-2008) и наведених у приложеном списку литературе, као и резултате приказане у претходним параграфима и поступак изводђења основних једначина динамичке равнотеже, и примењујући на сваку од плоча система појединачно и додајући утицај сила које се јављају у слоју при померању тачака свих M плоча $w_i(x, y, t)$, $i=1,2,\dots,M$ у трансверзалном правцу z осе на основу принципа динамичке равнотеже за сваки произвољни и одговарајући елемент плоче долазимо до M основних једначина динамичке равнотеже плоча и хибридног система у следећем облику:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_1(x, y, t)}{\partial t^2} + c_{(1)}^4 \left\{ (1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) [\Delta \Delta w_{(1)}(x, y, t)] \right\} - \\ & - a_{(1)}^2 \left\{ (1 + \kappa_\alpha^c \mathfrak{D}_t^\alpha) [w_2(x, y, t) - w_1(x, y, t)] \right\} = \tilde{q}_1(x, y, t) \\ & \frac{\partial^2 w_i(x, y, t)}{\partial t^2} + c_{(i)}^4 \left\{ (1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) [\Delta \Delta w_i(x, y, t)] \right\} + \\ & + a_{(i)}^2 \left\{ (1 + \kappa_\alpha^c \mathfrak{D}_t^\alpha) [w_i(x, y, t) - w_{i-1}(x, y, t)] \right\} - \\ & - a_{(i)}^2 \left\{ (1 + \kappa_\alpha^c \mathfrak{D}_t^\alpha) [w_{i+1}(x, y, t) - w_i(x, y, t)] \right\} = -\tilde{q}_i(x, y, t) \\ & \frac{\partial^2 w_M(x, y, t)}{\partial t^2} + c_{(M)}^4 \left\{ (1 + \kappa_\alpha \mathfrak{D}_t^\alpha) [\Delta \Delta w_M(x, y, t)] \right\} + \\ & + a_{(M)}^2 \left\{ (1 + \kappa_\alpha^c \mathfrak{D}_t^\alpha) [w_M(x, y, t) - w_{M-1}(x, y, t)] \right\} = -\tilde{q}_M(x, y, t) \end{aligned} \quad (125)$$

у којима је $\mathfrak{D}_t^\alpha[\bullet]$ оператор рационалног реда диференцирања описан изразом (2) [види референце Enelund, 1996 и Gorenflo and Mainardi, 2000], и параметром материјала α , из интервала $0 < \alpha < 1$; док су ознаке одређене следећим изразима:

$$\begin{aligned} c_{(i)}^4 &= \frac{\mathfrak{D}_i}{\rho_i h_i} = \frac{E_0 h^3}{12 \rho h (1 - \mu^2)} = c_0^4, \quad \kappa_\alpha = \frac{E_\alpha}{E_0}, \quad \kappa_\alpha^c = \frac{c_\alpha}{c}, \\ a_{(i)}^2 &= \frac{c}{\rho h} = a_0^2, \quad i=1,2,\dots,M. \end{aligned}$$

6. 2* Метода решавања система основних једначина динамике хибридног система више спрегнутих плоча слојевима са особинама пужења.

Решења претходног система (125) који садржи M парцијалних фракционог реда диференцијалних једначина динамичке равнотеже хибридног система M спрегнутих плоча слојевима са особинама пужења, као и у претходним параграфима користећемо прво Ventoulli-јеву методу партикуларних решења да би смо упростили задатак и свели исти на решавање система обичних фракционог рефа диференцијалних једначина.

Зато, решење претходног система (125) користимо разматрања из претходног

параграфа и закључке који се односе на сопствене амплитудне функције које усвајамо да су једнаке за све плоче система. За одговарајуће граничне услове које задовољавају све плоче система. Сопствене амплитудне функције $\mathbf{W}_{(i)nm}(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, M$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$, које задовољавају граничне услове и услове ортогоналности користимо да би смо задатак поједноставили. Одговарајуће сопствене функције времена $\mathbf{T}_{(i)nm}(t)$, $i = 1, 2, \dots, M$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$, су непознате и треба их одредити из услова да је задовољен систем (125).

Решења система (125) M парцијалних фракционог реда диференцијалних једначина претпостављамо у виду реда по сопственим амплитудним функцијама $\mathbf{W}_{(i)nm}(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, M$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ помноженим непознатим сопственим функцијама $T_{(i)nm}(t)$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$, $i = 1, 2, \dots, M$ времена у облику:

$$w_i(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(i)nm}(x, y) T_{(i)nm}(t), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (126)$$

После уношења претпостављених решења (126) у систем (125) и множењем једначина тог система са $W_{(i)sr}(x, y) dx dy$ и интегралења по средњој површи плоча и узимања у обзир услова ортогоналности (98) сопствених амплитудних функција и анализе чланова добијених једначина за различите комплете граничних услова ослањања плоча добијамо систем од M обичних фракционог реда диференцијалних једначина по непознатим сопственим функцијама $T_{(i)nm}(t)$, $i = 1, 2, \dots, M$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ времена t у следећем облику:

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_{(1)nm}(t) + \omega_{(1)nm}^2 (1 + \tilde{\kappa}_{\alpha(1)nm} \mathfrak{D}_t^\alpha) T_{(1)nm}(t) - \\ & - (a_{(1)}^2 + a_{(1)\alpha nm}^2 \mathfrak{D}_t^\alpha) T_{(2)nm}(t) = f_{(1)nm}(t) \\ & \ddot{T}_{(i)nm}(t) + 2\omega_{(i)nm}^2 (1 + \tilde{\kappa}_{\alpha(i)nm} \mathfrak{D}_t^\alpha) T_{(i)nm}(t) - \\ & - (a_{(i)}^2 + a_{(i)\alpha nm}^2 \mathfrak{D}_t^\alpha) [T_{(i-1)nm}(t) + T_{(i+1)nm}(t)] = f_{(i)nm}(t) \\ & \ddot{T}_{(M)nm}(t) + \omega_{(M)nm}^2 (1 + \tilde{\kappa}_{\alpha(M)nm} \mathfrak{D}_t^\alpha) T_{(M)nm}(t) - \\ & - (a_{(M)}^2 + a_{(M)\alpha nm}^2 \mathfrak{D}_t^\alpha) T_{(M-1)nm}(t) = -f_{(M)nm}(t) \\ & i = 2, \dots, M-1, \quad n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty \end{aligned} \quad (127)$$

коме су познате функције $f_{(i)nm}(t)$, $i = 1, 2, \dots, M$ одређене следећом изразима:

$$f_{(i)nm}(t) = \frac{\int_0^a \int_0^b \tilde{q}_i(x, y, t) W_{(i)nm}(x, y) dx dy}{\int_0^a \int_0^b [W_{(i)nm}(x, y)]^2 dx dy} \cdot i = 1, 2, \dots, M \quad (128)$$

Добијени систем спрегнутих обичних фракционог реда диференцијалних једначина

(127) по непознатим сопственим функцијама $T_{(i)nm}(t)$, $i=1,2,\dots,M$, $n,m=1,2,3,4,\dots,\infty$, се може решавати применом методе Laplace-ове трансформације.

После примене Laplace-ове трансформације на тај систем (127) и затим решавањем по непознатим Laplace-овим трансформацијама $\mathfrak{L}[T_{(i)nm}(t)]$, $i=1,2,\dots,M$ сопствених функција $T_{(i)nm}(t)$, $i=1,2,\dots,M$, $n,m=1,2,3,4,\dots,\infty$ времена, добијамо одговарајуће изразе у комплексном домену променљиве p . Одређивањем затим инверзне трансформације добијамо одговарајућа решења у сваком конкретном случају, што није једноставно.

7. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА.

Систем од M спрегнутих парцијалних фракционог реда диференцијалних једначина трансверзалних осцилација M плоча хибридног система више спрегнутих плоча слојевима са особинама пужења материјала плоча и дискретних елемената у слојевима спрезања плоча је изведен и Bernoulli-јевом методом партикуларних интеграла сведен на системе, сваки од M спрегнутих обичних фракционог реда диференцијалних једначина у сваком nm -том облику осциловања са одговарајућом сопственом амплитудном функцијом $\mathbf{W}_{(i)nm}(x,y)$, $i=1,2,\dots,M$, $n,m=1,2,3,4,\dots,\infty$ и по непознатим сопственим функцијама времена $T_{(i)nm}(t)$, $i=1,2,\dots,M$, $n,m=1,2,3,4,\dots,\infty$. Указано је да је метода Laplace-ове трансформације примњена на тај систем (127) даје решења по непознатим Laplace-овим трансформацијама $\mathfrak{L}[T_{(i)nm}(t)]$, $i=1,2,\dots,M$ сопствених функција $T_{(i)nm}(t)$, $i=1,2,\dots,M$, $n,m=1,2,3,4,\dots,\infty$ времена, у комплексном домену променљиве p .

На примеру система две спрегнуте плоче, показано је да се за хомогени систем са својствима пузања, уз уведене претпоставке и дефинисане услове могу одредити нове, главне координате $\xi_{(s)nm}(t)$, $s=1,2$, $n,m=1,2,3,4,\dots,\infty$, на којима се систем распада на два неспрегнута парцијална фракционог реда осилатора. То отвара питање да ли се и за хомогени хибридни систем са M спрегнутих плоча слојевима са особинама пужења материјала плоча и елемената слоја, може наћи M главних координата $\xi_{(s)nm}(t)$, $s=1,2,\dots,M$, $n,m=1,2,3,4,\dots,\infty$ помоћу којих би се систем спрегнутих обичних фракционог реда диференцијалних једначина за $\tilde{q}_i(x,y,t) \neq 0$ или $\tilde{q}_i(x,y,t) = 0$ могао свести на систем неспрегнутих обичних фракционог реда диференцијалних једначина облика:

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi}_{(s)nm}(t) + (\omega_{s,nm}^2 + \omega_{s\alpha,nm}^2 \mathfrak{D}_t^\alpha) [\xi_{(s)nm}(t)] = \\ & = G_{L(s)nm} [f_{(1)nm}(t), f_{(s)nm}(t), \dots, f_{(M)nm}(t)] \end{aligned} \quad (129)$$

$s=1,2,\dots,M$, $n,m=1,2,3,4,\dots,\infty$

у којима су $\xi_{(s)nm}(t)$, $s=1,2,\dots,M$, $n,m=1,2,3,4,\dots,\infty$ нове нормалне или главне координате реолинеарног система фракционог реда за сваки nm -ти из бесконачног скупа модова са одговарајућом сопственом амплитудном функцијом.

Из система (129), можемо закључити да за случај слободних осцилација хомогеног хибридног система са M спрегнутих плоча слојевима са особинама пужења материјала плоча и елементна слоја, као и када је $\tilde{q}_i(x, y, t) = 0$, да је свака од једначина (129) типа (11) или (40) или (74), па се за те описивање осцилација тих парцијалних осцилатора могу користити исти редови, које смо добили за репења у оретходним параграфима. Тадаа можемо закључити да решења система (129) за $\tilde{q}_i(x, y, t) = 0$ по непознатим функцијама времена $T_{(i)nm}(t)$, $i = 1, 2, \dots, M$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ линеарне комбинације главних субмодова $\xi_{(s)nm}(t)$, $s = 1, 2, \dots, M$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ nm -тог мода.

Увођење, тригонометријске методе (види референце [79, 21, 41, 42]) за репавање постављеног задатка омогућава да се реципрочни изра детерминанти система једначина (128) у комплексном домену променљиве p и за nm -то мод напише у облику:

$$\frac{1}{\Delta_{nm}^{(M)}(p)} = \prod_{s=1}^{s=M-1} \frac{1}{\left\langle \left\langle p^2 + 2\omega_{nm}^2 \left[1 + \frac{\omega_{\alpha nm}^2}{\omega_{nm}^2} p^\alpha \right] \right\rangle - 2a^2 \left[1 + \frac{a_\alpha^2}{\omega^2} p^\alpha \right] \cos \frac{s\pi}{M} \right\rangle}$$

Претходни израз је погодан за развој у степени ред из кога се инверзном Laplace-овом трансформацијом могу одредити основни субмодови nm -тог мода за систем са својствима шужења материјала и спрежућег слоја.

Динамика хомогених ланаца је основни модел на који се своди задатак одређивања решења за хибридне системе вишег реда, спрегнутих више плоча или више клатна, а на бази математичке аналогије и феноменолошког пресликавања модела осцилација апстраховањем физичке диспаратности математички описаних хибридних система.

НАПОМЕНА: Део ових истраживања подржало је Министарство науке Републике Србије преко Математичког института САНУ финансирањем пројекта No. ON144002 - Теоријска и примењена механика кругих и чврстих тела. Механика материјала (Theoretical and Applied Mechanics of the Rigid and Solid Body. Mechanics of Materials), као и преко Машинског факултета Универзитета у Нишу.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ariaratnam S.T., (1996), Stochastic Stability of Viscoelastic Systems under bounded Noise Excitation, IUTAM Symp. on Advances in Nonlinear Stochastic Mechanics, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1996, pp. 11-18.
- [2] Betten, J. Mathematical modeling of materials behavior under creep conditions, ASME Applied Mechanics Reviews, vol. 54, no. 2 March 2001., pp. 107-132.
- [3] Bishop R.E.D., (1952), Longitudinal Waves in Beams, Aero. Q., 3, 280-293.
- [4] Bačić, B. S., Atanacković, T. M., Stability and creep of a fractional derivative order viscoelastic Rod, Bulletin T, CXXI de L'Academie Serbe des Sciences st de Arts - 2000, Class des Sciences mathematques et naturelles Sciences mathematiques, No. 25, 115-131.
- [5] Dli Gen-guo, Zhu Zheng-you and Cheng Chanh-jun, (2001), Dynamical Stability of viscoelastic Column with Fractional Derivative Constitutive Relation, Applied Mathematics and Mechanics, English Edition, vol. 22. No. 3, Mar. 2001, Shanghai, China, pp. 294-303.
- [6] Enelund, M., Fractional Calculus and Linear Viscoelasticity in Structural Dynamics, Division

- of Solid Mechanics, Chalmers tekniska Hogskola, Goteborg, Sweden, 1996., p.1-27, A1-33+B1-20+C1-19+D1-28+E1-26.
- [7] Gorenflo, R., Mainardi, F., (2000) Fractional Calculus, Integral and Differential Equations of Fractional Order, CISM Lecture Notes, Udine, Italy, Preprint 54 pages, pp. 223-276.
- [8] Goroško O. A. i Hedrih (Stevanović) K., Analitička dinamika (mekanika) diskretnih naslednih sistema, (Analytical Dynamics (Mechanics) of Discrete Hereditary Systems), University of Niš, 2001, Monograph, p. 426, YU ISBN 86-7181-054-2.
- [9] Goroško O. A. i Hedrih (Stevanović) K., Construction of the Lagrange's Mechanics of the hereditary systems,, Facta Universitatis Series Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol. 6, No. 1 2007, pp. 1-23.
- [10] O. Goroshko, K. Hedrih. Dynamics of the hereditary discrete systems, Proceedings Nonlinear Dynamics , Polytechnic Kharkov, 2008., pp. 77-82
- [11] Goroško O. A. and Hedrih (Stevanović) K., (2008), Advances in development of the analytical dynamics of the hereditary discrete systems, Journal of Physics: Conference Series, 96(2008) 012143, <http://www.iop.org/EJ/main/-list=current/>
- [12] Goroshko O.A. and Hedrih (Stevanović), K., (2007), Construction of the Lagrange mechanics of the hereditary systems, Minisymposium Oppening Lecture, Proceedings of the International Summer School APM –Advanced Problem in Mechanics, Saint Petersburg 2007., pp. 133-156. (Minisymposia IDS - OpeningLecture)
- [13] Goroshko, O.A., Puchko, N.P., Lagrangian equations for the multibodies hereditary systems, Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol. 2, No 7, 1997, pp. 209-222.
- [14] Hedrih (Stevanović) K., Thermorheological Hereditary Pendulum, (Ref. No. TVP-11) Thermal Stresses 99, Edited by J.J. Skrzypek and R. B. Hetnarski, Cracow 1999, pp.199-202.
- [15] Hedrih (Stevanović) K., Transverzalne oscilacije grede od naslednog materijala - Prvi deo. Parcijalna integro-diferencijalna jednačina, Originalni naučni rad, Tehnika, Mašinstvo 49 (2000) 1, str. M1-8M..
- [16] Hedrih (Stevanović) K., Transverzalne oscilacije grede od naslednog materijala - drugi deo. Primena ideje S.T. Ariaratnama za ispitivanje stabilnosti formi grede pod dejstvom slučajnih sila, Originalni naučni rad, Tehnika, Mašinstvo 49 (2000) 2, str. M1-6M.
- [17] Hedrih (Stevanović) K., (2000), Dynamics of Discrete Hereditary Chain Systems, (in Macedonian), 7-th Symposium on Theoretical and Applied Mechanics, Struga, Macedonia, pp. 245-254.
- [18] Katica (Stevanović) Hedrih, Transversal Creep Vibrations of a Beam with Fractional Derivative Constitutive Relation Order, First part: Partial Fractional-differential equation. Part second: The S.T. Ariaratnam idea Applied to the Stochastic Stability of the Beam Dynamic Shape, under Axial Bounded Noise Excitation, Proceedings of Forth International Conference on Nonlinear Mechanics (ICNM-IV), edited by Wei Zang Chien and All, August 14-17, 2002, Shanghai, P.R. China, pp. 584-595. . ISBN 7-81058-077-9/0-007.
- [19] Hedrih (Stevanović) K., The transversal creep vibrations of a fractional derivative order constitutive relation on nonhomogeneous beam, XVIII Yugoslav Conference with International Participation-Noise and Vibrations, Niš 2002, 17-18 October, 2002., Plenary Lecture, Abstracts p.55, Full paper in CD-Proceedings pp.1-13.
- [20] Katica (Stevanović) Hedrih, (2008), Energy transfer in double plate system dynamics, Acta Mechanica Sinica, Volume 24, Number 3 / June, 2008, pp. 331-344, DOI 10.1007/s10409-007-0124-z, Springer Berlin / Heidelberg, ISSN (567-7718 (Print) 1614-3116 (Online).

- [21] Hedrih (Stevanović) K., (2006), Modes of the Homogeneous Chain Dynamics, Signal Processing, Elsevier, 86(2006), 2678-2702.. ISSN: 0165-1684
www.sciencedirect.com/science/journal/01651684
- [22] Hedrih (Stevanović) K., (2005), Integrity of Dynamical Systems, Journal Nonlinear Analysis, 63 (2005) 854 – 871.
- [23] Hedrih (Stevanović), K., (2007), Dynamics of coupled systems, Journal Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Elsevier, Volume 2, Issue 2, June 2008, Pages 310-334.
- [24] Hedrih (Stevanović), K., (2007), Energy analysis in the nonlinear hybrid system containing linear and nonlinear subsystem coupled by hereditary element, Nonlinear Dynamics, Springer, 30.01.2007, vol. 51, no. 1, pp. 127-140. DOI 10.1007/s11071-007-9197-2.
- [25] Hedrih (Stevanović), K., (2006b), Transversal vibrations of the axially moving sandwich belts, Archive of Applied Mechanics, Springer, 03.02.2007, vol. 77, no. 7, pp. 523-539. DOI 10.1007/s00419-007-0187-0 <http://springerlink.com/content/?k=Hedrih>
- [26] Hedrih (Stevanović) K., (1997), Energy Analysis of Oscillatory Processes and the Modes in Nonlinear Systems, Solid Mechanics, Serbian-Greek Symposium 1997, Scientific Meetings of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Department of Technical Sciences, SANU Belgrade, vol. LXXVII., Book. 3, pp. 137-146.
- [27] Hedrih (Stevanović) K., (1997), Interpretation of the transfer of energy from high-frequency to low-frequency modes by averaging asymptotic method Krilov-Bogolybov-Mitropolsky, AiM 96, Asymptotics in Mechanics, Proceedings of the Second International Conference, Edited by Ali H. Nayfeh and Kiril V. Rozdestvensky, p. 302, Saint-Petersburg State Marine Technological University, Saint Petersburg, 1997, pp. 97-104. ISBN 5-88303-069-6, Izdatelskiy centr SPbGMTU, 1997.
- [28] Hedrih (Stevanović) K., (2006), Transversal Vibrations of Double-Plate Systems, Acta Mechanica Sinica, Springer, (2006) 22, pp. 487-501 (hard cover and on line).
- [29] Hedrih (Stevanović), K., (2007), Double plate system with discontinuity in the elastic bonding layer, Acta Mechanica Sinica VOL. 23, NO. 2, PP. 221-229. (hard cover and on line).
- [30] Hedrih (Stevanović), K., (2006), The frequency equation theorem of small oscillations of a hybrid system containing coupled discrete and continuous subsystems, Facta Universitatis Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol.5, No 1, 2006 pp. 25 - 41 UDC 534.1:534.012:534.013: <http://facta.junis.ni.ac.yu/facta/>
- [31] Hedrih (Stevanović), K., (2007), Energy analysis of the double plate system, Acta Mechanica Sinica, Springer, DOI 10.1007/s10409-007-0124-z
- [32] Hedrih (Stevanović) K., (2003), Frequency equations of small oscillations mixed systems of the coupled discrete and continuous subsystems, Mehanika tverdogo tela (Rigid Body Mechanics), Donetsk, UDC 531.1:534.012:534.013:, ISSN 0321-1975, vip. 33, pp. 174-189. Ukraine.
- [33] Hedrih (Stevanović), K., (2005), Eigen Amplitude Vectors and Functions Extended Orthogonality of Small Oscillations Mixed Systems of the Coupled Discrete and Continuous Subsystems, Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol. 4 No. 17, 2005. pp. 225-243. YU ISSN 0534-2009. UDC 534.1:534.012:534.013. <http://facta.junis.ni.ac.yu/facta/macar/macar200501/macar200501-04.html>
- [34] Hedrih (Stevanović) K., (2005), Partial Fractional Differential Equations of Creeping and Vibrations of Plate and their Solutions (First Part), Journal of the Mechanical Behavior of

- Materials, Freund Publishing House Ltd. (accepted for publishing). 2005, pp. 305-314. ISSN 0334-8938
http://www.freundpublishing.com/JOURNALS/materials_science_and_engineering.htm
- [35] Hedrih (Stevanović), K., (2006), The frequency equation theorems of small oscillations of a hybrid system containing coupled discrete and continuous subsystems, *Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics*, Vol.5, No 1, 2006 pp. 25 – 41. UDC 534.1:534.012:534.013 <http://facta.junis.ni.ac.yu/facta/>
- [36] Hedrih (Stevanović), K., (1995), *Energijska analiza kinetike konstrukcija za različite modele materijala* (Energy analysis of the syucture kinetics for different models of the materials), *Kratki prikazi radova, "Mehanika, materijali i konstrukcije"*, SANU, Beograd, 1995, pp. 106-107. (in Serbian)
- [37] Hedrih (Stevanović) K., (2005b), Multifrequency forced vibrations of thin elastic Shell, CD Proceedings, Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, Eindhoven University of Technology, Editors: D.H. van Campen, M.D. Lazurko, W.P.J.M. van den Over, ID of contribution 21-439, pp2417-2426. ISBN 90 386 2667 3, www.enoc2005.tue.nl
- [38] Hedrih (Stevanović) K., (2005c), Partial Fractional Order Differential Equations of Transversal Vibrations of Creep-connected Double Plate Systems, in Monograph - Fractional Differentiation and its Applications, Edited by Alain Le Mahaute, J. A. Tenreiro Machado, Jean Claude Trigeassou and Jocelyn Sabatier, U-Book, pp. 289-302.
- [39] Hedrih (Stevanović) K., The Dissipation Function of a Nonconservative System of Mass Particles, *Tensor, N.S.*, Vol.63, No.2(2002), pp.176-186. ISSN 0040-3504
- [40] Hedrih (Stevanović), K., (2007), Hybrid Systems and Hybrid Dynamics: Theory and Applications, Invited Plenary Lecture, 8th HSTAM International Congress on Mechanics, Patras, 12 – 14 July, 2007, Greece, Proceedings, Edited by N. Bazwos, D.L. Karabalis, D. Polyzos, D.E. Beskos and J. T. Katsikadelis, Volume I, pp. 77-86.
- [41] Hedrih (Stevanović), K., Discrete Continuum Method, Symposium, Recent Advances in Analytical Dynamics Control, Stability and Differential Geometry, Proceedings Mathematical institute SANU Edited by Vladan Djordjević, p. 151, 2002, pp.30-57. ISBN 86-80593-32-X.
- [42] Hedrih (Stevanović) K., (2004), Discrete Continuum Method, COMPUTATIONAL MECHANICS, WCCM VI in conjunction with APCOM'04, Beijing, China, © 2004 Tsinghua University Press & Springer-Verlag, pp. 1-11, CD.
- [43] Hedrih (Stevanović) K., (2002), Transversal Creep Vibrations of a Beam with Fractional Derivative Constitutive Relation Order, First part: Partial Fractional-differential equation. Part second: Stochastic Stability of the Beam Dynamic Shape, under Axial Bounded Noise Excitation, Proceedings of Forth International Conference on Nonlinear Mechanics (ICNM-IV), edited by Wei Zang Chien and All, August 14-17, 2002, Shanghai, P.R. China, pp. 584-595.
- [44] Katica (Stevanović) Hedrih, Differential Equations of Two Mass Particles, Constrained with a Piezo-thermo-rheological Hereditary Element, Dynamics, Proceedings of full papers, Edited by Dragutin Veličković, 5 th International Conference on Applied Electromagnetics, PES 2001., pp. 77-80.
- [45] Hedrih (Stevanović) K., Discrete Continuum's Models and Thermo-rheological Elements - Basic Idea and Tensor Equations, Homogeneous Linear Chain and Plane/Space Material Nets, Proceedings of full papers, Edited by Dragutin Veličković, 6 th International Conference on Applied Electromagnetics, PES 2003, Stability Pact for South Eastern Europe, DAAD, pp. 127-130 and pp. 131-134.

- [46] Hedrih (Stevanović), K., Hybrid System Dynamics, Proceedings, First International Congress of Serbian Society of Mechanics, Editors: D. Šumarac and D. Kuzmanović, Srpsko društvo za mehaniku, 10-13, April, 2007, pp. 79-84. <http://www.ssm.org.yu/congress2007/authors.html>
- [47] Hedrih (Stevanović), K., (2007), Multifrequency and infinite frequency regimes and Lyapunov exponents as the measures of the hybrid system dynamic integrity, Proceedings of the International Summer School APM –Advanced Problem in Mechanics, Saint Petersburg 2007., pp. 157-169. (Minisymposia IDS – Closing Lecture)
- [48] Hedrih (Stevanović), K., (2007), Stochastic dynamics of hybrid systems with thermo-rheological hereditary elements, Edited by Awrejcewicz P. Olejnik and Mrozowski, Proceedings of IX INTERNATIONAL CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS - THEORY AND APPLICATIONS, December 17-20, 2007. Łódź, POLAND, Technical University of Łódź. Department of Automatics and Biomechanics., Abstracts p. 62, Full Paper, pp.193-202.
- [49] Hedrih (Stevanović) K., Izabrana poglavlja Teorije elastičnosti, Mašinski fakultet u Nišu, (Same Chapters in Theory of Elasticity), prvo izdanje 1976, drugo izdanje 1988, str. 424.
- [50] Hedrih (Stevanović), K., (1999), Rheonomic Coordinate Method Applied to Nonlinear Vibration Systems with Hereditary Elements, www-EUROMECH, Copenhagen 1999, <http://www.imm.dtu.dk/documents/user/mps/ENOC/Proceedings/> Technical University of Denmark, 4A, pp.1-24.
- [51] Hedrih (Stevanović) K., (2006), Transversal Vibration of a Parametrically Excited Beam: Influence of Rotatory Inertia and Transverse Shear on Stochastic Stability of Deformable Forms and Processes, ©Freund Publishing House Ltd. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 7(1), 117-124, 2006. ISSN 1565-1339.
- [52] Hedrih (Stevanović) K., (2008), Dynamics of coupled systems, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Volume 2, Issue 2, June 2008, Pages 310-334.
- [53] Hedrih (Stevanović) K., (2008a), Thermo-rheological hereditary elements and discrete continuum model dynamics, "Mashinoznavstvo", Ukraine, # 2 (128) za 2008, pp. 18 - 27. (in English).
- [54] Hedrih (Stevanović), K., (2008c), Analogy between dynamics of thermo-rheological and piezo-rheological pendulums, Journal of Physics: Conference Series, 96 (2008) 012219 doi:10.1088/1742-6596/96/1/012219, IOP Publishing, <http://www.iop.org/EJ/main/list=current/>
- [55] Hedrih (Stevanović) K., (2002b), The Dissipation Function of a Nonconservative System of Mass Particles, Tensor, N.S., Vol. 63, No.2(2002), pp.176-186. ISSN 0040-3504.
- [56] Hedrih (Stevanović) K., (2003b), The Longitudinal and Transversal Creep Vibrations of a Fractional Order Constitutive Relation Beams, Scientific Bulletin of the Politehnica, University of Timisoara, Transaction on Mechanics, Tom 48(62), Fasc. 1, 2003. pp. 5-12, 13-22, Editura Politehnica, Timisoara. ISSN 1224-6077. <http://www.utt.ro/english/pbseng.shtml>
- [57] Hedrih (Stevanović) K., (2004), Partial fractional order differential equations of transversal vibrations of creep connected double plates systems, Workshop Preprints/Proceedings No 2004-1 IFAC workshop on Fractional Differentiation and its Applications FDA 04, ENSEIRB, Bordeaux France, July 19-21, 2004., pp. 299-304.
- [58] Hedrih (Stevanović) Katica, (2004a), Creep Vibrations of a Fractional Derivative Order Constitutive Relation Deformable Bodies, Proceedings Eighth American Congress of Applied Mechanics PACAM VIII. La Habana, Cuba, 5-9 January 2004, Series Applied Mechanics in

- Americas, Vol. 10. pp. 548-551, ISBN 959-7056-20-8.
- [59] Hedrih (Stevanović), K., (2006c), The transversal creeping vibrations of a fractional derivative order constitutive relation of nonhomogeneous beam, *Mathematical Problems in Engineering*, Special issue : Nonlinear Dynamics and their Applications in engineering sciences, Geust Editor: Jose Manoel Barhesar, Volume 2006 (2006), Article ID 46236, 18 pages, www.hindawi.com, doi:10.1155/MPE/2006/46236, Volume 2006, No. 5, pp. 61-78.
- [60] Hedrih (Stevanović) K., (2008), Energy transfer in double plate system dynamics, *Acta Mechanica Sinica*, Volume 24, Number 3 / June, 2008, pp. 331-344, DOI 10.1007/s10409-007-0124-z, Springer Berlin / Heidelberg, ISSN (567-7718 (Print) 1614-3116 (Online),
- [61] Hedrih (Stevanović) K., (2008), Energy interaction between linear and nonlinear oscillators (Energy transient through the subsystems in the hybrid system), ISSN 1027-3190. *Ukr. mat. Őurn.*, 2008, t. 60, # 6, pp. 796-814.
- [62] Hedrih (Stevanović) K., (2008), Dynamically determined and undetermined hereditary discrete systems (External and internal degrees of freedom in the hybrid hereditary dynamics), Invited Lecture-Key note Lecture, The Euromech Colloquium 498 Nonlinear Dynamics of Composite and Smart Structure (NDCS) -Nonlinear Dynamics and Chaos of Composite and Smart Structures (NDCS), May 21-23, 2008, Kazimierz Dolny, POLAND. Lublin 2008, pp. 29-39.
- [63] Hedrih (Stevanović) K., Mathematical analogy between hybrid system dynamics, 45 minutes Invited Plenary Lecture, Book of Extended Abstracts, Edited by Alexander M. Kovalev (IAMM NASU, kovalev@iamm.ac.donetsk.ua), 10th International Conference “Stability, Control and Rigid Bodies Dynamics” Donetsk (Ukraine), June 2008, pp. 125-127.
- [64] Katica (Stevanović) Hedrih, Leonhard Euler (1707-1783) and Rigid Body Dynamics, *Scientific Technical Review*, Vol. LVII, No. 3-4, Belgrade, 2007 . pp. 3-12. YU ISSN 1820-0206
- [65] Hedrih (Stevanović), K., Filipovski, A., Longitudinal Vibrations of Rheological Rod with Variable Cross Section, *Int. Journal Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulations*, Shanghai Inst. of Applied Mathem. and Mechanics, China, 1999, vol.4, No. 3, pp. 89-95. ISSN 10007 5704 - Center for Nonlinear Science peking University, China.
- [66] Hedrih (Stevanović) K. and Filipovski A., Longitudinal Creep Vibrations of a Fractional Derivative Order Rheological Rod with Variable Cross Section, *Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatics Control and Robotics*, Vo. 3, No. 12, 2002, pp. 327-350. (in English). YU ISSN 0354-2009. (University Journal Facta Universitatis – Series Mechanics, Automatic Control and Robotics, University of Niš, Mathematical Reviews Annual Index 2000, Author Index M-Z, Key Index, Abbreviations of Names of Serials, . American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA.)
- [67] Hedrih (Stevanović) K. and Simonović J., Transversal Vibrations of a Double Circular Plate System with Visco-elastic Layer Excited by a Random Temperature Field, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2008, Vol. 9, No.1, pp.47-50. <http://www.ijnsns.com/2008/TOC9.1.doc>
- [68] Hedrih (Stevanović) K., and Simonović J., Dynamical Absorption and Resonances in the Sandwich Double Plate System Vibration with Elastic Layer, *Scientific Technical Review*, Vol. LVII, No. 2, 2007, pp. 1-10.
- [69] Hedrih (Stevanović) K. and Simonović J., Transversal Vibrations of a non-conservative double circular plate system, *FACTA UNIVERSITATIS Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*, VOL. 6, No 1, 2007, pp. 45 - 64.

- <http://facta.junis.ni.ac.yu/macar/macar200701/macar200701toc.html>
- [70] Katica (Stevanović) HEDRIH and Julijana Simonović, (2008), Non-linear dynamics of the sandwich double circular plate system, The Euromech Colloquium 498 Nonlinear Dynamics of Composite and Smart Structure (NDCS) -Nonlinear Dynamics and Chaos of Composite and Smart Structures (NDCS), May 21-23, 2008, Kazimierz Dolny, POLAND. Lublin 2008, pp. 170-175.
- [71] Janković, V. S., Potić, V. P. and Hedrih (Stevanović), K., *Parcijalne diferencijalne jednačine i integralne jednačine sa primenama u inženjerstvu* (Partial differential equations and integro-differential equations with examples in engineering), Univerzitet u Nišu, 1999, str. 347. (in Serbian).
- [72] Mathieu, E., *Cours de Physique Mathématique*, Paris, 1873.
- [73] Mitropolyskiy, Yu. A. (1955), *Nestashionarnie proshesi v nelineynih sistemah*, AN USSR, Kiev. (in Russian)
- [74] Mitropolyskiy Yu.A., Nguyen Van Dao, (2003), *Lectures on Asymptotic Methods of Nonlinear Dynamics*, Vietnam National University Publishing House, Hanoi, p. 494.
- [75] Mitropolyskiy, Yu.A and Mosseenkov, B.I.,(1968), *Lekciyi po primenyeniyu metodov k recheniyu uravneniy v chastnih proizvodnih*, Int. Math. AN USSR, Kiev. (in Russian)
- [76] Mitropolyskiy, Yu.A., (1964), *Problemi asimptoticheskoy teorii nestashionarnih kolebaniy*, Nauka Moskva, pp. 431. (in Russian)
- [77] Mitropolyskiy, Yu. A., (1971), *Metod usrednyenia v nelineynoy mehanike*, Naukova Dumka, Kiev, pp.340.
- [78] Mitropolyskiy, Yu. A., (1995), *Nelineynaya mehanika-Asimptoticheskie metodi*, Institut matematiki NAN Ukraini, Kiev, pp. 397.
- [79] Rašković, D., (1965), *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, 503.
- [80] Rašković, D., (1985), *Teorija elastičnosti*, Naučna knjiga, 1985, 414.
- [81] Rabotnov, Yu.N., (1977), *Elements of Hereditary Mechanics of Solids*, Moscow, Nauka (in Russian).
- [82] Rzhantsin, A.R., (1949), *Some Questions of the Mechanics of Deforming in time Systems.*, Moscow, GTTI (in Russian). 1949, p. 248.
- [83] Savin G. N., Ruschisky Yu. Ya., (1976), *Elements of Hereditary Media Mechanics*, Kyiv, Vyscha shkola (in Ukrainian), p. 250.
- [84] Slonimsky G.L., (1961), *On the Law of Deforming of High Polymer Bodies*, Rep.Acad.Sci. USSR, Vol. 140, No.2 (in Russian).
- [85] Stevanović (Hedrih) Katica, *Application of the Asymptotic Method for study of the Elastic Bodies Nonlinear Oscillations – Energy Analysis of the Elastic Bodies Oscillatory Motions*, Doctoral Dissertation, Mašinski fakultet, Niš, 1975., str. 331. (in Serbian).
- [86] Torvik P. J. Torvik, Bagley, R. L., *On the Appearance of the Fractional Derivatives in the Behavior of Real Materials*, Journal of Applied Mechanics (Trasaction ASME) 51 (1984), pp. 294-298.
- [87] Strutt, M.J. O.: *Lamésche, Mathieusche und verwandle Funktionen in Physik und Technik*, Berlin,1932.