Monograph of Academy of Nonlinear Sciences
Advances in Nonlinear Sciences II - Sciences and Applications, Belgrade
Несагласје у теорији Механике: Знања и Наука, 2006, Vol. 2, pp.161-223.

НЕСАГЛАСЈА У ТЕОРИЈИ МЕХАНИКЕ ЗНАЊА И НАУКА

Вељко А. Вујичић

Математички институт САНУ
11000 – Београд, P.O. Box 1367, Србија
E-mail: vvujicic@turing.mi.sanu.ac.yu

Уместо предговора. У предговору књиге "Препринципи механике" [1] написано је, да је механика тачна природна наука; тачна колико и математика или, чак тачнија толико, колико њена тврђења захтевају, поред математичких доказа, још и верификацију природе. "Са становиста те науке може се констатовати да појмови "знање" и "наука" нису истозначни. За то тврђење довољан је доказ да постоји несагласје међу зналцима са високим схколским и научним звањима о много чему из теорије и праксе механике. Науку не чине само постојећа знања, него провера и поправка тих знања; она сумњичи постојећа знања, те тражи нова и нова разумска и пртактична открића у разгранатој теорији, уклучујући и њене основе. Управо од основа проистиче несагласје у у математичким наукама природе. Широко је распрострањено двојако тумачење друге аксиоме Њутнове механике, што у закључцима теорије доводи до великих промашаја практичне механике. Употреба несистемизованих математичких знања и њихових ограничења, често наводе теоријске физичаре да објашњавају свет онако какав не постоји.

Кључне речи: Знања, наука, есенција класичне и небеске механике.

1 ЕСЕНЦИЈАЛНИ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧКЕ МЕХАНИКЕ

Математика се учи као непобитна истина, али на вишем нивоу знања много се што шта у њој мења, замењује, допуњује и изграђује према проверама и потребама људске праксе. Наилази се на дефиниције вектора као елемента скупа вектора или као елеменат векторског простора и то тако, да те дефиниције не одређују ваљано ни појам вектора, ни појам скупа вектора. То се запажа на разним нивоима знања. Могу се прочитати широко распрострањене недоречености у битним чињеницама за физику, као: "Количина кретања система материјалних тачака једнака је векторском збиру $\mathbf{K} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$," иако то није сагласно са сабирањем везаних вектора, као што су вектори брзина $\mathbf{v}_i$.

Присутна је чињеница да се ни разни високо образовани математичари међусобно не разумеју или се не слажу у својим математичким знањима.

То је природно кад се зна да се математичко знање развило и развија као и стабло, чије гране могу да се калеме, разграњавају, подрезују или одбацују. Математика није само рачуница, како је схватају основни школарци; она је мудрост, производ човековог ума способног да осмишљава кратке описе мноштва сложених природних појава и бића у њима. Математика, као таква је незаобилазни чинилац у есенцији теорије механике.

За појашњење есенцијалних проблема науке о кретању тела потребно је издвојити битне математичке појмове, који се користе у механици, а о којим не постоји јединствено сагласје.

Бројеви су незаобланзи у свакој математичкој дисциплини. Овде ћемо означити почетним словом $\mathcal{R}$ све разумске ($\mathcal{R}$atio - Разум) бројеве. Како Механика није чисто разумска теорија, јер њена основа садржи својства: *масу* m, $dim\, m = M$, *дужину* l, $dim\, l = L$ и *време* t, $dim\, t = T$, или друкчије написано: $m \in R(M)$, $l \in R(L)$, $t \in R(T)$, или казано: маса m има својство M, дужина има својство L, а време t има својство T. Различита својства не могу се сабирати, нити једначити, јер

$$M \neq L \neq T. \tag{1.1}$$

Означимо *мноштво свих реланих бројева масе са* $R(M)$, *мноштво свих реалних бројева дужине са* $R(L)$ *и мноштво реалних бројева времена са* $R(T)$. Краће речено, то су скупови *именованих* бројева различитих суштина. Поновимо познати став да се елементи ових различитих именованих бројева не могу међусобно сабирати, иако се могу множити

$$m^a \cdot l^b \cdot t^c; \quad (a, b, c) \in \mathcal{R}.$$

Ти производи чине нове скупове именованих бројева $R(MLT)$ са постојећим физичким значењима, те чувају особеност есенције механике. Све друге величине и релације механике изражавају се помоћу три наведена атрибута. У противном, сагласно преприниципу постојања [1] не припадају теорији о кретању тела. Поред скаларних величина, које се одређују именованим бројевима, механику карактеришу и друга својства, као: брзине материјалних тачака, угаоне брзине, импулси кретања, убрзања, силе, моменти спрегова сила и моменти импулса кретања. Такве величине често се успешно и краће описују векторима и тензорима.

Вектори. Вектор је математички појам који има бројну вредност усмерену у одређеном правцу. Другим речима вектор $\mathbf{v}$ може се написати изразом

$$\mathbf{v} = v\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{v}}{v},$$

где је v бројна вредност (величина, количина, скалар) вектора $\mathbf{v}$, а $\mathbf{v}_0$ је јединични орјентирни бездимензиони вектор, тако да је

$$dim\, \mathbf{v} = dim\, v.$$

У геометрији усмерена дуж $\boldsymbol{\rho}$ је типични пример вектора из скупа вектора $\mathbf{V}(L)$, чије су величине дужине $\rho \in R(L)$, а $\boldsymbol{\rho}_0 = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}$ је орентирни бездимензиони јединични вектор.

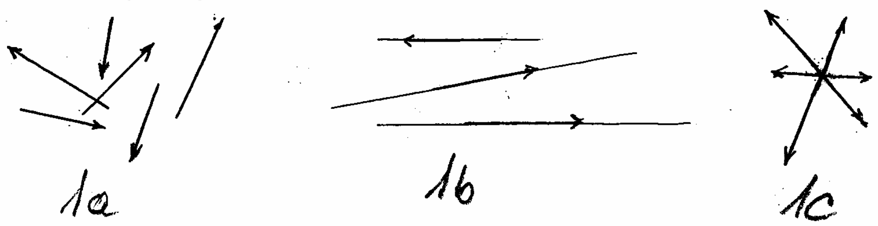
Како се дужина дужи l, $l \in R(L)$ или растојања ρ између двеју тачака може израчунати помоћу три координатна броја l_1, l_2, l_3 из $R(L)$, тако се и вектор $\boldsymbol{\rho}$ може одредити помоћу тих бојева и три независно орјентирна вектора $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \in \mathbf{V}_3$, као

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{i=1}^{3} \rho^i \mathbf{e}_i; \quad \mid \mathbf{e}_i \mid = 1, \quad \mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j.$$

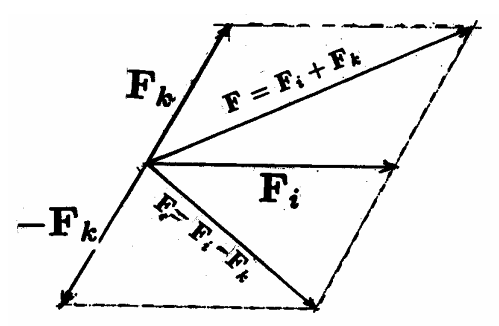
Аналогно запису $\rho \in R(L)$, може се написати $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{V}_3$, или $\rho^i \in R^3(L)$, где је $\mathbf{V}_3$ уређени скуп три вектора, а ρ^i елементи скупа реалних бројева $\rho^i \in R(L)$.

Према наведеном биће овде разумљивији одговарајући називи: векторски скуп S^n над линеарном базом вектора $\mathbf{V}_n$. Наведени приступ појму вектора није случајан јер нека уопштења "векторских простора" и њихове примене воде ка значајним несагласностима у механици.

Сабирање вектора. У векторском рачуну и његовој примени у механици разликују се три врсте вектора: *слободни, клизећи и везани вектори.* Слободни вектор је одређен величином, замишљеним павцем и смером (Сл.1а); клизећи вектор је онај, чији је правац одређен правом линијом која се подудара са осом вектора, (сл. 1б). Везани вектор за тачку одређује се датом тачком од које је неодвојив, величином и орјентисаним правцем, (Сл.1ц). Разлике су значајне.



Слика 1. Врсте вектора



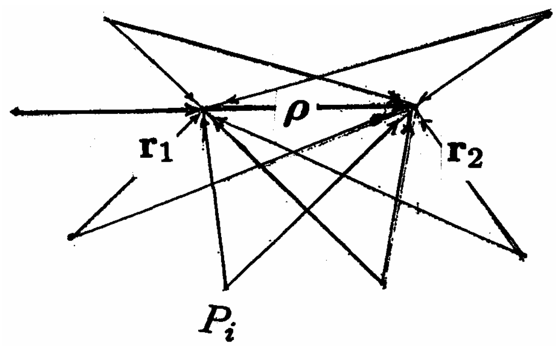
Слика 2. Слика сама по себи убедљиво показује разлику између вектора

Положаји тачака M_1 и M_2 могу да се одреде мноштвом вектора положаја $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, чији су полови P_i слободно изабране тачке посматране равни. Међутим, вектор $\boldsymbol{\rho} = \rho\boldsymbol{\rho}_o$ је само један, и то:

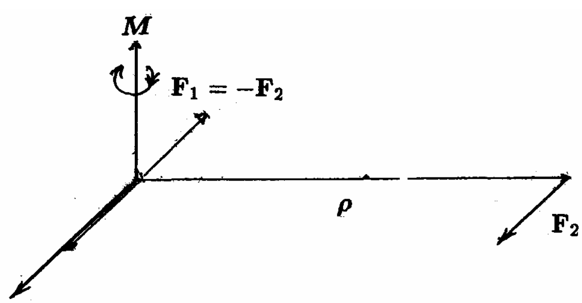
$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \ldots = \mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_{\nu-1} = \boldsymbol{\rho}, \tag{1.2}$$

ако тачке P_i, M_2 и M_1 припадају истој правој. Ако вектор $\boldsymbol{\rho}$ лежи на одређеној правој с њега називају *клизећи вектор*, или *вектор везан за праву.* Таквим векторима описују се силе у механици. Чак понеки аутор дефинише силу речима "сила је вектор". Клизећи вектори у равни могу се свести на заједничку тачку у пресеку правих, на којим леже клизећи вектори.

Основно правило сабирања вектора одређује се правилом паралелограма, (Сл.3) тј. *Збир два вектора једнак је дијагонали паралелограма коју заклапају странице које чине та два вектора.*



Слика 3. Слагање вектора



Слика 4. Редукција вектора на тачку

Додатни услов у исказу: "вектора који се своде на на заједничку тачку" има за последицу додатни вектор у операцији сабирања.

Свођење система клизећих вектора на једну тачку у хомогеној средини (телу) може се свести учинити очигледним помоћу цртежа 4.[1].

Нека у тачкама хомогене равни постоје вектори $\mathbf{F}_i$. Стање вектора $\mathbf{F}_i$ у тачки M_i неће се променити ако се у тој тачку додају две друге силе $\mathbf{F}_k$ и $-\mathbf{F}_k$; $\mathbf{F}_k + (-\mathbf{F}_k) = \mathbf{0}$. Тако у тачки M_1 настаје вектор $\mathbf{F} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_k$, и вектор момента спрега $M_i = \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i$. Истим поступком могу се свести све силе у било коју тачку C на један *главни вектор*

$$\mathbf{F}_C = \sum_i \mathbf{F}_i, \qquad dim\,\mathbf{F}_i = MLT^{-2},$$

и један слободни вектор друге димензије - *главни момент*

$$\mathbf{M}_C = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i; \quad dim\,\mathbf{M} = ML^2T^{-1}. \tag{1.3}$$

На таквом доказу постављена је **теорема**: *Сваки систем вектора* $\mathbf{F}_i$, *произвољно распоређени у хомогеној области може се свести на главни вектор* $\mathbf{F}$ *у произвољно изабраној тачки* C, *главни момент* $\mathbf{M}_C$, *који је једнак збиру векторских производа радијус вектора* $\boldsymbol{\rho}_{Ci}$ *и* $\mathbf{F}_i$.

При том треба приметити да главни вектор није резултанта система свих вектора, сведених у тачку C, него тек са главним моментом $\mathbf{M}_C$ чини резултујући еквивалент систему свих вектора у постојећој хомогеној конфигурацији.

Примена алгебарских операција над везаним векторима, као над слободним векторима, доводи до несагласних резултата.

Убедљив **пример.** Брзина материјалне тачке је типични везани вектор за материјалну тачку. Нека две материјалне тачке M_1 и M_2 нека представљају два возила, која се крећу правим путем паралелно један поред другог једнаким брзинама $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Нека читалац проба да их сабере?!

Збир два везана вектора за неподударне тачке не одговара дефиницији сабирања два слободна вектора, а још мање возачкој пракси посматраних возила. Да би се избегле наведене тешкоће сложености векторског рачуна у сабирању разних вектора, приступа се скаларном рачуну у аналитичкој механици и диференцијалној геометрији.

Вишедимензиони векторски "простори". Са знацима навода аутор овог рада жели да истакне разлику пројма *простор*, као природну стварност, од појмова разних математичких "простора". У еуклидској геометрији, положај било које тачке у односу на тачку посматрања може да се одреди помоћу вектора положаја; то значи треба знати три податка: величину вектора полозаја, правац и смер, или три уређене компоненте вектора

$$\mathbf{r} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 = \sum_{i=1}^{3} y^i \mathbf{e}_i := y^i \mathbf{e}_i,$$

где су $\mathbf{e}_i \in \mathbf{E}_3$ три јединична базна вектора, управљениг један на другом. За разлику од назива *компоненте* $\mathbf{y}_i \in \mathbf{E}_3$, бројеве или скаларне функције $y^i \in R^3$ називамо *кординатама вектора* или "векторима", при чему се подразумеа да је унапред позната векторска база. Број базних вектора и број координата вектора најчешће су једнаки, али не као правило, нарочито у еуклидској геометрији. Тако, ако постоји N мђусобно **неповезаних** тачака, њихови положаји су одредљиви помоћу N вектора $\mathbf{r}_\nu; , \nu = 1, \ldots, N$:

$$\mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{3} y^i_\nu \mathbf{e}_i,$$

где се појављује $3N$ координата y^i_ν над базом $\mathbf{E}_3$. При том не треба заборавити да то није $3N$-димензиони векторски простор, јер је у суштини реч о тродимензионом вектору у $\mathbf{E}_3$:

[1]Види, на пример, В. Вујичић, Статика, Завод за уџбенике, Београд, 1969, или било који други уџбемик из статике

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu=(\sum_{\nu=1}^{N}y_\nu^1)\mathbf{e}_1+(\sum_{\nu=1}^{N}y_\nu^2)\mathbf{e}_2+(\sum_{\nu=1}^{N}y_\nu^3)\mathbf{e}_3. \tag{1.4}$$

Исто тако, у односу на неку другу векторску базу $\mathbf{g}_i$; $i=1,2,3$ може се написати вектор $\boldsymbol{\rho}=f^i\mathbf{g}_i\in\mathbf{R}_3$, или $(f^1,f^2,f^3)\in R^3$. Уколико је, на пример $y^3=0$, или $f^3=0$, имаћемо *дводимензионе координатне векторе* $(y^1,y^2)\in E^2$, или општије R^2, при чему се не губи из вида постојање релације $f^3=0$.

Запазимо и то да су вектори из $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{R}$ *линеарни* по базним векторима, без обзира на степен *нелинеарности* њихових кординантних функција f^i. Зато се и каже *линеарни (читај: векторски) простори.*Ако се степен линеарности мери по степену координатних функција f^i, тада је реч о нелинеарним векторским просторима. У криволинијским системима координата x^1,x^2,x^3, које стоје у узајамној трансформацији са праволинијским координатама y^i, тј. $y^i=y^i(x^1,x^2,x^3)$, за које је

$$\mid\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\mid\neq 0,$$

диференцијал вектора може се написати у облицима:

$$d\boldsymbol{\rho}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y^i}dy^i=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}dx^i=dy^i\mathbf{e}_i=\frac{\partial yi}{\partial x^j}dx^j\mathbf{e}_i=\mathbf{g}_jdx^j, \tag{1.5}$$

где је

$$\mathbf{g}_j(x)=\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\mathbf{e}_i. \tag{1.6}$$

Према томе, метрика $d\rho^2\in E^3$ има облик

$$d\rho^2=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y^j}dy^idy^j=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^j}dx^idx^j=\delta_{ij}dy^idy^j=g_{ij}(x)dx^idx^j, \tag{1.7}$$

где је

$$g_{ij}(x^1,x^2,x^3)\in E^3\subset R(L);\quad i,j=1,2,3$$

метрички тензор еуклидске геометрије.

Вишекоординатне многострукости диференцијалне геометрије. Под изразом "вишедимензиони" или "вишекоординатни" подразумевају се геометријски објекти, који се описују помоћу више него једном координатом или компонентом. Најпростија, те и најопшитија многобразност или многострукост је N тачака M_ν, чије положаје одређују N вектора положаја (1.4). Број $3N$ координата y_ν^i налазимо у запису $y_\nu\in E^{3N}\subset S(L)$, али треба разликовати E^{3N} и $\mathbf{E}_3\in\mathbf{V}_3$, јер се, поновимо, сви наведени вектори $\mathbf{r}_\nu$ могу сабрати у један тродимензиони вектор (1.4) То је могуће зато што сви вектори имају једну произвољно изабрану заједничку полазну тачку O (слика 2,а). Међутим, ако посматрамо векторе $\Delta\mathbf{r}_\nu$, који су појединачно везани за своје ν-те тачке, ми имамо N координатних система, чији су полови управо тачке M_ν, (слика 2,б).

Координатни вектори $\mathbf{e}_\nu$ могу бити међусобно паралелни или са другим векторима неког изабраног координаног система $\mathbf{e}_i$, али не морају. Сабирање ових везаних вектора $\Delta\mathbf{r}_\nu$ није могуће без свођења на једну тачку, што није могуће без паралелног померања и придодавања вектора момената спрегова тих вектора. Сада је видљив склад између $3N$ координата вектора $\Delta\mathbf{r}_\nu$ и $3N$ базних вектора $\mathbf{e}_{\nu1},\mathbf{e}_{\nu2},\mathbf{e}_{\nu3}$.

Анализа у односу на криволинијске системе координата, као прво, истиче да криволинијске координате x немају исте димензије дужине, као и то да базни или координатни вектори нису констатни вектори, него се јављају као векторске функције криволинијских кордината. При том је значајно да се уочи да се вектори $\Delta\mathbf{r}_\nu$, као и диференцијали $d\mathbf{r}_\nu$, знатно разликују од вектора положаја $\mathbf{r}_\nu$, јер је сваки вектор $d\mathbf{r}_\nu$ везан за своју одговарајућу тачку M_ν. Због тога њихово векторско сабирање наилази на још веће тешкоће у рачунању. Зато се диференцијална геометрија и аналитичка механика опредељују за скаларне релације и инваријанте. Замена праволиијских координата y^i помоћу *криволинијских координата* x, уобичајеним релацијама $y^i = y^i(x^1, x^2, x^3)$ не сме да мења геометријски смисао дифернцијала $\Delta\mathbf{r}$, што се обезбеђује релацијама

$$\Delta\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y^i}\Delta y^i = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Delta x^j = \Delta y^i\mathbf{e}_i = \Delta x^j\mathbf{g}_j, \tag{1.8}$$

или

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\Delta s} = \frac{\Delta y^i}{\Delta s}\mathbf{e}_i = \frac{\Delta x^j}{\Delta s}\Delta x^j\mathbf{g}_j.$$

Одавде се види да се координатни вектори

$$\mathbf{g}_j(x) = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^j}$$

јављају као векторске функције криволинијских координата почетне тачке вектора $\Delta\mathbf{r}$. Увођење криволинијских координата у потпуности за сваку тачку или делимично само за неке тачке, има смисла када се задатак простије решава. То се најчеше дешава када између тачака постоје неке *везе*, које се могу написати у облику

$$f_\mu(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = 0,$$

или у односу на праволинијски систем координата

$$f_\mu(y^1, \ldots, y^{3N}) = 0,$$

или еквивалентно у криволинијском систему координата

$$f_\mu(x^1, \ldots, x^{3N}) = 0. \tag{1.9}$$

На **пример,** ако нека тачка припада сферној површи, која се помоћу Декартових координата описује једначином $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = c^2$, а у сферном систему кордината ρ, ϕ, θ, знатно простијом једначином $\rho = c$, природно је да се употребе сферне кординате.

Сваки од вектора

$$d\mathbf{r}_\nu = \frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial x^i_\nu}dx^i_\nu$$

може се помножити скаларно одговарајућим векторима $\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial x^j_\nu}$ па их је, као скаларе, могуће сабрати:

$$\sum_{\nu=1}^{N} d\mathbf{r}_\nu \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial x^j_\nu} = \sum_\nu^N \frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial x^i_\nu}dx^i_\nu \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial x^j_\nu} := \sum_\nu^N g_\nu(x)_{ij}dx^i_\nu = g_{kl}(x^1, \ldots, x^{3N})dx^l,$$

где су сада за ознаке: x^κ уведена формално једначења $x^{3\kappa-2} \equiv x^{3\kappa-1} \equiv x^{3\kappa}$.

Исто тако може се написати

$$ds^2 := \sum_{\nu=1}^{N} d\mathbf{r}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu}^{N} = g_{(\nu)ij} dx^i_\nu := g_{kl}(x^1, \ldots, x^{3N}) dx^l.$$

Над тензором

$$g_{ij} = g_{ji}(x^1, \ldots, x^{3N}) \tag{1.10}$$

може се, као и у (1.7), успоставити метрика

$$dr^2 = g_{kl}(x) dx^k dx^l. \tag{1.11}$$

По таквом изразу могло би се казати "метрика $3N$-димензионог простора", али се при том превиђа како се дошло до такве конструкције разним сменама. Тако конструисани "*многодимензиони простори*" у геометрији могу имати фиктивни смисао, али не и реални по чему би била реч о неком другом стварном и постојећем простору. *Вишедимензиони простор геометрије*, је математички појам, под којим означава број координата или координатно мноштво, којим се одређује положај **система** од N тачака, при чему појам **sistem** подразумева постојање веза, као на пример, у (1.9).

За систем тачака везаних помоћу коначних веза (1.9), где се подразумева да су функције f_μ непрекидне у могућој областти, тј. у области у којој су задовољени услови:

$$df_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial x^i} dx^i = 0, \quad | \, \partial f_\mu \partial x^i \, | \neq 0, \quad i =, \ldots, 3N,$$

могуће је, као сто је познато, одредити координате x^i у функцији $3N - k = n$ независних генералисаних координата $q^1, \ldots, q^n$, које представљају везе у параметарском облику $x^i = x^i(q^1, \ldots, q^n)$, над којим се изводи метрика

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta. \tag{12}$$

Тензор

$$g_{\alpha\beta}(q^1, \ldots, q^n) \in M^n \tag{1.13}$$

често називају метрички тензор n-димензионе многострукости, или n-димензионог конфигурационог простора или, тачније, конфигурационих простора. Ништа загонетно; на глатком школском глобусу наше планете, мноштво места, обележених тачкама, одређују се помоћу мерних бојева две независне кординате $(q^1 = \varphi, q^2 = \theta) \in M^2$, које имају значења географске ширине и географске дужине, али не и на рељефном глобусу, на којем се види да Земља није математичка сфера $R = c = conct.$, него реално тело, на којем многа брда и планине, па и места, означавају бројним вредностима надморске висине.

2. ГЕОМЕТРИЗАЦИЈА МЕХАНИКЕ ИЛИ МЕХАНИЗОВАЊЕ ГЕОМЕТРИЈЕ.

У уводним релацијама је истакнуто да поред скупа бројева геометрије $R(L)$, есенцију механике чине још и $R(M)$ и $R(T)$. То се постиже просто, множењем бројева геометријске природе са скаларним величинама маса $m \in R(M)$ и времена $t \in R(t)$. У уводу првог свог знаменитог дела "Математички принципи науке о природи"[2][2], Њутн је поред осталог написао 8. маја 1686. године: "Геометрија се заснива на механичкој пракси и није нешто друго, него тај део *опште механике*, у којем се излаже и доказује умеће тачног мерења." Та констација великана механике има исти смисао и данас.

Израз (1.8) подељен са малим интервалом времена Δt, тј. гранична вредност односа растојања и интервала времена Δt, за који се материјална тачка помери из једног положаја $\mathbf{r}(t)$ у непосредно близак други положај $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ - природни извод вектора $\boldsymbol{\rho}(t)$ по времену представља по дефиницији брзину кретања материјалне тачке

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^i}\frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^i}\frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \dot{y}^i \mathbf{e}_i = \dot{x}^i \mathbf{g}_i. \tag{2.1}$$

Памти се и пише, као важно, да је

$$dim\,\mathbf{v} = dim\,\dot{y}^i = LT^{-1}.$$

као и то, да је брзина $\mathbf{v}_\nu$ везани вектор за ν-ту тачку.

Производ масе m материјалне тачке и вектора њене брзине $\mathbf{v}$ *назива се импулс кретања материјалне тачке*

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{2.2}$$

Према томе, и импулс материјалне тачке је вектор везан за тачку. Основне физичкке димензије тог значајног појма су сва три својства есенције механике, тј.

$$dim\,\mathbf{p} = MLT^{-1}, \tag{2.3}$$

Као што се види, вектор $\mathbf{p}_\nu$ материјалне тачке има исти карактер вектора, као и вектор брзине $\mathbf{v}_\nu$ у поступку сабирања. То значи да се вектори импулса $\mathbf{p}_\nu$, међусобно повезаних тачака система не сабирају као слободни вектори.

Збир импулса кретања више материјалних тачака има важан смисао у систему материјалних тачака. Појам "систем"подразумева да су материјалнне тачке повезане неким везама $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu) = 0$, које је неопходно узети у обзир при сабирању вектора брзина.

[2] Newton Is. Newton, Philosophiæ Naturalis Principia Mathematika.

Вектори импулса кретања механичког система могу се према претходном претставити формулама

$$\mathbf{p}_\nu = m_\nu \mathbf{v}_\nu = m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial\, q^\alpha} \dot{q}^\alpha. \tag{2.5}$$

Скаларним множењем координатним векторима $\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial\, q^\beta}$ добија се

$$p_{\nu\beta} = m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \cdot \partial \mathbf{r}_\nu \partial q^\beta \dot{q}^\alpha.$$

С обзиром да су координатни импулси $p_{nu\beta}$ скалари могуће их је сабрати

$$p_\beta := \sum_{\nu=1}^{N} p_{\nu\beta} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial\, q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial\, q^\beta} \dot{q}^\alpha = a_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta, \tag{2.6}$$

одакле се види да је $a_{\alpha\beta}$ инерециони тензор целог система:

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial\, q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial\, q^\beta} = a_{\alpha\beta}\big(m_1, \ldots, m_N; q^1, \ldots, q^n\big). \tag{2.7}$$

На значај зависности тенсора $a_{\alpha\beta}$ од маса за геометријску интерпретацију механике система са променљивим масама, А.В. Гохман у својој књижици ([30], стр. 8) позива се на радове В.А. Вујичића.

Упоређивањем формула геометрије и наведених формула механике, види се велика сличност, а за нека математичка схватања и идентичност релација. Међутим, постоји неспорна разлика:

1. геометрију смо разматрали помоћу бројева из $R(L)$, а механику помоћу бројева из скупа $R(MLT)$;

2. тангентном вектору $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ у геометрији, одговара вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\frac{ds}{dt}$ у механици;пројекција вектора $\mathbf{p}_\nu$ ν-те материјалне тачке на тангентни правац кординатне линије q^β. Означимо је двоиндексним знаком

$$p_{\nu\beta} = m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial\, q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial\, q^\beta} \dot{q}^\alpha.$$

С обзиром да су пројекције импулса $p_{\nu\beta}$ скалари, могуће их је сабрати:

3. у геометрији не постоји импулс кретања материјалне тачке, димензије MLT^{-1}, као ни саме материјалне тачке.

4. Тачка у геометрији је бездимензиона, а материјална тачка има димензију масе. Може се рећи материјална тачка је геометријска тачка, којој је придодата маса, али то скрива велике разлике, јер једна геометријска тачка може да буде једна те иста за небројиво мноштво материјалних неједнаких тачака.

5. За физичаре и филозофе природе значајна је разлика у поимању метричког тензора (1.13) и њему одговарајућег инерционог тензора (2.7).

6. У геометрији често се употребљавају глаголи: "кретати, померати, преносити, премештати,...", али те речи у реалности захтевају употребу времена t, $dim\, t \in R(T)$. Појам *кретање* управо је предмет кинематике, која је део механике. Зато није сувишно поновити ваљаност поднаслова којиим се истиче "геометризација механике". Геометризована механика ствара од система материјалних тачака слике вишедимензионих простора, који су само фикције и погрешне преставе о недоступним објектима, нарочито у небеској механици.

Системи са променљивим везама. У случају да коначне везе

$$f_\mu(x^1, \ldots, x^{3N}, t) = 0; \quad \mu = 1, \ldots, k$$

зависе, оред кординатних функција $x(t) \in E^{3N}$, и од времена t, услови брзине и убрзања се знатно мењају; повећава се број сабирака у тим једначинама, што се види у следећем:

$$\dot{f}_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial y^\alpha}\dot{y}^\alpha + \frac{\partial f_\mu}{\partial t} = grad_\nu f_\mu \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial t} = 0. \tag{2.9}$$

То значи да постоји по један сабирак $\frac{\partial f_\mu}{\partial t}$ промене више, него што је то у случају геометријских веза. Променљиве везе у току времена морају задовољавати димензиону једначину, тј. морају бити димензионо хомогене. Да би се постигла та хомогеност између кордината $y \in R(L)$, и времена $t \in R(T)$, неопходо је да ове величине буду повезане неким параметром κ димензија L и T. Дакле време у механичким везама јавља се у структури функција, које садрже димензионе параметре, те променљиве или покретне везе у складу са дефиницијом (2.8), пишемо у облику

$$f_\mu(y, \tau) = 0 \quad (\mu = 1, \ldots, k), \tag{2.10}$$

где је τ нека реална функција времена са одређеним реалним коефицијентима који имају физичке димензије. У циљу краћег писања, уместо функције τ са одређеним коефицијентима, уведимо допунску координату y^0 тако да испуњава услов

$$f_0 = y^0 - \tau(t) = 0. \tag{2.11}$$

Помоћу кординате y^0 једначине веза (2.9) могу бити записане у облику

$$f_\mu(\tilde{y}) = 0, \quad \tilde{y} = (y^0, \underbrace{y^1, \ldots, y^{3N}}_{y}) \tag{2.12}$$

а услови брзине и убрзања у облику

$$\dot{f}_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0}\dot{y}^0 = 0 \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\ddot{f}_\mu &= \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial\tilde{y}\partial\tilde{y}}\dot{\tilde{y}}\dot{\tilde{y}} + \frac{\partial f_\mu}{\partial\tilde{y}}\ddot{\tilde{y}} = \\ &= \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial y\partial y}\dot{y}\dot{y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^0\partial y}\dot{y}\dot{y}^0 + + \frac{\partial^2 f}{\partial y^0\partial y^0}\dot{y}^0\dot{y}^0 + \frac{\partial f_\mu}{\partial y}\ddot{y} + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0}\ddot{y}^0 = 0.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Последњу релацију убрзања напишимо краће

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial y}\ddot{y} + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0}\ddot{y}^0 = \Phi\left(\tilde{y}, \dot{\tilde{y}}\right), \tag{2.15}$$

где је састав функције Φ очигледан.

Уврштавањем $\ddot{y}$ из једначине

$$m\ddot{y} = Y + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y} \tag{2.16}$$

у једначину (2.15) добија се

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial y}\sum_{\sigma=1}^{k}\lambda_\sigma\frac{\partial f_\sigma}{\partial y} = m\big(\Phi - \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0}\ddot{y}^0\big) - Y\frac{\partial f_\mu}{\partial y}.$$

Решења по непознатим множитељима веза показују да силе реакција реономних веза не зависе само од кордината y и брзина $\dot{y}$, него и од убрзања $\ddot{y}^0$, те и од инерционе силе $-m\ddot{y}^0$, која се јавља због промене веза по времену. То показује да се не ради само о формалном записивању једне додатне корадинате, него о идентификацији једне постојеће силе, која је била изгубљена игнорисањем реономне кординате.

Везе у једначинама: (2.10) и (2.11) могу се написати у параметарском облику

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q^0, q^1, \ldots, q^n), \quad n = 3N - k, \tag{2.17}$$

где су : $q = (q^1, \ldots, q^n)$ *независне генералисане координате, а* q^0 *реономна координата* која задовољава једначину

$$q^0 - \tau(t) = 0. \tag{2.18}$$

Свођењем коначних веза на параметарски облик (2.17) смањује се број диференцијалних једначина за број веза и изврши елеминација сила веза $\mathbf{R}_N$, што значајно олакшава решавање задатка.

Брзине ν-тих материјалних тачака, сходно дефиницији (2.1), су

$$\mathbf{v}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^0}\dot{q}^0 + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^n}\dot{q}^n = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha \tag{2.19}$$

где су $\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^\alpha}$ кординатни вектори које ћемо означавати двоиндексним знаком $\mathbf{g}_{\nu\alpha}$; индекс ν означава број материјалне тачке, а индекс α број независне кординате q^α, $\alpha = 0, 1, ..., n$. За сабирање по индексу ν употребљавамо знак сабирања $\sum_\nu$, а сабирање по индексима кордината α означава понављање једног те истог слова у истом изразу као доњег и горњег индекса. Вектор (2.19), као што се види, има $n+1$ независних кординатних вектора. Сагласно томе и вектор импулса (2.4) ν-те материјалне тачке масе m_ν посматраног система је

$$\mathbf{p}_\nu = m_\nu \mathbf{v}_\nu = m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha. \tag{2.20}$$

Скаларним множењем кординатним векторима $\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial^\beta}$, добијају се координатни импулси

$$p_{\nu\beta} = m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^\beta}\dot{q}^\alpha, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n..$$

С обзиром да су $p_{\nu\beta}$ скалари могуће их је сабрати

$$p_\beta := \sum_{\nu=1}^{N} p_{\nu\beta} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^\beta}\dot{q}^\alpha = a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha, \tag{2.21}$$

одакле се види да је $a_{\alpha\beta}$ инерциони тензор целог система

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^\beta} = a_{\alpha\beta}(m_1, \ldots, m_N; q^0, q^1, \ldots, q^n). \tag{2.22}$$

Помоћу важних релација (2.21) уводи се појам генералисаних импулса система материјалних тачака. *Генералисани импулси јављају се линеарним хомогеним формама генералисаних брзина*, што је сагласно са основном дефиницијом импулса (2.5). С обзиром да је детерминанта инерционог тензора $a_{\alpha\beta}$ у општем случају различита од нуле, могуће је одредити генералисане брзине $\dot{q}^\alpha$ као линеарне хомогене комбинације генералисаних импулса и то

$$\dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta} p_\beta, \tag{2.23}$$

где је $a^{\alpha\beta}$ *контраваријантни инерциони тензор.*

Ако везе не зависе јавно од познатих функција времена τ, не јавља се реономна кордината q^0, те у свим изразима (2.16) до (2.22) исчезавају кординате $q^0, \dot{q}^0$ и p_0. Форма импулса (2.21) се не мења изузев што индекси $\alpha = 0, 1, \ldots, n$ не узимају вредности од 0 до n, него од 1 до n. Да бисмо у даљем тексту то лакше разликовали, нека грчки индекси $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ узимају вредности од 0 до n $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \ldots, n)$, а атински i, j, k, l од 1 до $n\,(i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n)$. При таквим индексима може се писати

$$\mathbf{v}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^0}\dot{q}^0 + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i}\dot{q}^i, \tag{2.24,}$$

или коваријантно

$$\begin{aligned} p_i &= a_{0i}\dot{q}^0 + a_{ij}\dot{q}^j = a_\alpha \dot{q}\alpha, \\ p_0 &= a_{00}\dot{q}^0 + a_{0j}\dot{q}^j = a_{0\alpha}\dot{q}^\alpha, \\ \dot{q}^i &= a^{0i}p_0 + a^{ij}p_j = a^{i\alpha}p_\alpha, \\ \dot{q}^0 &= a^{00}p_o + a^{0j}p_j = a^{0\alpha}p_\alpha. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Према томе и квадратна форма кинетичке енергије E_k добија инваријантни облик

$$2E_k = a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = a^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n+1, \tag{2.26}$$

што се знатно разликује, од стандардног неинваријантног обика

$$2E_k = a_{ij}\dot{q}^i \dot{q}^j + 2b_i \dot{q}^i + c, \quad i, j = 1 \ldots, n.$$

В.Г. Ветернников и В.А. Синицын, у својој книзи ([34], стр. 53) истучу да ту несагласност одстрањује приступ, који је предложио Вујичић, [35].

За случај коначних геометријских веза, које не садрже јавно време, реономна координата је једнака нули, па се израз (2.26) своди на познату хомогену квадратну форму

$$2E_k = a_{ij}\dot{q}^i \dot{q}^j = a^{ij}p_i p_j, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.27}$$

Генералисане кординате $q^1, \ldots, q^n$ и генералисане импулсе $p_1, \ldots p_n$ понегде се називају "Хамилтоновим кординатама". То није само формална страна проблема, што ћемо истаћи у следећем тексту.

3. ЗАДАЦИ МЕХАНИКЕ ПО ЊУТНУ И ПО ХАМИЛТОНУ.

У уводу свог првог издања фундаменталног дела механике ([2], стр.27) Њутн је написао: *"Задатак (дело) математичара је да нађу такву силу, која би тачно задржавала тело у кретању по задатој орбити са даном брзином, и обратно да нађу, такав криволинијски пут, на којем би задаттом силом било отклоњено тело, које је изашло из задатог места са задатом брзином."* Касније та два општа задатка механике налазимо у литератури под називима: "Први и други задатак механике", или "директни и инверзни (обратни) задатак механике".

Општенито, ми разматрамо мешовити систем коначних и диференцијалних једнацина:

$$m_\nu \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} = m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = F_\nu, \tag{3.1}$$

$$\Psi_\mu(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{F}_\nu) = 0, \quad \mu = 1, \ldots, k \leq N, \quad \nu = 1, \ldots, N, \tag{3.2}$$

помоћу којих се могу одредити и силе.

Пример. Два материјалне тачке, крећу се, сагласно другој и трећој Њутновој аксиоми. Диференцијале једначине кретања су:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1, \quad m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2; \tag{3.3}$$

а једначина растојања је:

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \tag{3.4}$$

где вектори $\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1$ леже на истој правој. Наш задатак је да одредимо силе. Постоји потпун систем 4 једначине (3.3) и (3.4). Диференцирањем једначине (3.4) два пута по времену добија се

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\boldsymbol{\rho}}, \tag{3.5}$$

или, сагласно једначинама (3.3),

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_1}{m_1} = \mathbf{F}_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}.$$

Одавде произилази [19] да је

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\boldsymbol{\rho}}, \tag{3.6}$$

као и

$$F_\rho = \frac{\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho} - v_{or}^2}{m_1 + m_2}\frac{m_1 m_2}{\rho}. \tag{3.7}$$

Овај резултат, који је прво добијен помоћу Лагранжових једначина прве врсте, [1], изазвао је неверицу извесног броја физичара, који сматрају да је "Њутнов закон гравитације" закон природе за целу васиону. Сумњу су хтели разјаснити питањем: да ли се Лагранжов метод неодређених множилаца може применити и у Хамилтоновим диференцијалним једначинама кретања

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}, \tag{3.A}$$

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \tag{3.B}$$

које не садрже јавно ни силе нити Лагранжеве множиоце веаза.

Целовит одговор на то питање саопштен је на Конгресу теоријске и примење механике Српског друштва за механику 2007. године, под насловом "Хамилтонов инверзни проблем"[5]. Један слушалац је прокоментарисао да "наслов рада није тачан." Како је тај неуобичајени коментар показао неразумевање суштине и важности питања, овде ћемо у циљу убедљивијег објашњења поново навести неколико основних ставова аналитичке механике.

Хамилтонов инверзни проблем. У раду ([6], стр. 236-237) Хамилтон показује да је Лагранж увео функцију силе U, која садржи масе, динамичке параметре и координате положаја тачака. У том смислу он је јасно написао диференцијалне једначине кретања у облику:

$$m_i x_i'' = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i y_i'' = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i z_i'' = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \tag{3.8}$$

После краћих трансформација и увођења функције

$$H = E_k - U = E_k(\bar\omega_1, \bar\omega_2, \dots, \bar\omega_{3N}; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{3N}) - U(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{3N}) = E_k + E_p,$$

Хамилтон је добио, како сам каже, нови начин претстављања диференцијалних једначина кретања система од n тачака, било да привлаче или одбијају једна другу:

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_1}{dt} &= \frac{\delta H}{\delta \bar\omega_1}; \quad \frac{d\bar\omega_1}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_1},\\
\frac{d\eta_2}{dt} &= \frac{\delta H}{\delta \bar\omega_2}; \quad \frac{d\bar\omega_2}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_2},\\
&\dots\\
\frac{d\eta_{3n}}{dt} &= \frac{\delta H}{\delta \bar\omega_{3n}}; \quad \frac{d\bar\omega_{3n}}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_{3n}},
\end{aligned}$$

где су $\bar\omega$, η, δ Хамилтонови симболи за: $\bar\omega = p$, $\eta = y$, $\delta = \partial$.

Са те тачке Хамилтоновог гледишта *"задатак математичке динамике за систем од N тачака састоји се у том да се проинтеграли систем (3.А) и (3.Б) од $6N$ обичних диференцијалних једначина првог реда"*,([6], стр. 237). То се знатно разликује од два наведена задатка механике по Њутну.

У цитираном делу Хамилтон чак не оперише са појмом силе у њутновом смислу. Зато сам суштину тог разматрања назвао **проблемом**, и насловио "Хамилтонов инверзни проблем", јер како одредити силе помоћу једначина (3А) и (3Б) у којим не фигурише јавно појам силе.

Пођимо од Њутнове теорије која садржи Хамилтонове једначине кретања. За претпоставку да, уместо силе $\mathbf{F}$, постоји функција силе $U = -E_p$, као и претпоставке да је $m = const.$, једначине (3.8) могу се написати у облику:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial E_p}{\partial y^i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.9}$$

Хамилтонове диференцијалне једначине кретања (3.А) еквивалентне су само систему једначина (3.9), али не општим једначинама (3.1). Хамилтонове једначине (3.А) и (3.Б) немају исте димензије; једначине (3.Б) имају димензију брзине, а једначине (3.А) димензију силе MLT^{-2}.

Једначине (3.8) су физичка база Хамилтонових диференцијалних једначина (3.А) и (3.Б). Трансформација једначина (3.9) на облик (3.А) и (3.Б) је математичка формалност.

У циљу веће јасности наведимо прост **primer** матерујалне тачке у односу на координарни систем $y \in E^3$; биће: $\mathbf{p} = m\dot{y}^i\mathbf{e}_i \to p_j = m\delta_{ij}\dot{y}^i$, где су δ_{ij} Кронекерови симболи. Одавде следи

$$\dot{y}^k = \frac{\delta^{ki}}{m}p_i = a^{ki}p_i.$$

Како је кинетичка енергија по дефиницији

$$E_k = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{m}{2}\delta_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j = \frac{\delta^{ij}}{2m}p_ip_j = \frac{a^{ij}}{2}p_ip_j; \tag{3.10}$$

добија се:

$$\dot{y}^i = \frac{\partial E_k}{\partial p_i} = \frac{\partial(E_k + E_p)}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m}, \tag{3.11}$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial E_k}{\partial y^i} = \frac{\partial(E_k + E_p)}{\partial y^i} = -\frac{\partial H}{\partial y^i} = -\frac{\partial E_p}{\partial y^i}. \tag{3.12}$$

Словом H Хамилтон је означио, ([7], п. 237), збир кинетичке о потенцијалне енергије, тј.

$$H(y^1, y^2, y^3; p_1, p_2, p_3) = E_k + E_p = \frac{\delta^{ij}}{2m}p_ip_j + E_p(y). \tag{3.13}$$

Релације (3.11) имају векторску структуру из $R(LT)$, а координате импулса $p_i \in R(MLT)$ имају коваријантну структуру. Разлика између једначина (3.11) и (3.12) је велика, нарочито у криволинијском координатном систему $x := (x^1, x^2, x^3)$, као и у генералисаном систему координата $q^\alpha \in M^n$. Функција H је скаларна инваријанта и, као таква, има физичку димензију енерегије у свим кординатним системима:

$$dim\, H = ML^2T^{-2}. \tag{3.14}$$

Не превидимо чињеницу да једначине (3.11) имају облик општих једначина (3.Б), а једначине (1.12) облик општих једначина (3.А). Треба напоменути и то да је значајно у Хамилтоновим једначинама (3.А) и (3.Б) које вредности имају индекси α, β јер то показује не само број једначина, него и физичка својства механичког система.

Ако постоји веза између кордината y^1, y^2, y^3 или ново ограничење кретања помоћу везе $f(y^1, y^2, y^3) = 0$ јавља се нова сила $\mathbf{R} = \lambda\, grad\, f$ у једначини (3.12). Та сила биће изгубљена ако се рачуна помоћу хомогеног система једначина (1.А) и (1.Б). Покажимо то на простом **примеру** кретања тешке тачке масе m по некој равни:

$$f(y^1, y^2, y^3) = ay_1 + by_2 + y_3 = 0. \quad (y^i \equiv y_i) \tag{3.15}$$

Задатак је:

1. Одредити величину силе

$$\mathbf{R} = \lambda\, grad\, f, \tag{3.16}$$

која задржава тело у равни (3.15), помоћу Хамилтонових једначина и Лагранжових множилаца λ;

2. решити инверзни проблем помоћу Хамилтонових хомогених једначина типа (3.А) и (3.Б) у односу на генералисане независне координате $(p, q) \in T^*M^2$

Решавање: 1. Полазећи од Лагранжових једначина прве врсте, Хамилто нов систем једначина се своди на

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial y^i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y^i}, \tag{3.17}$$

и

$$\dot{y}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{3.18}$$

У овом примеру то се своди на:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial y^1} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y^1} = -a\lambda,$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y^2} = -b\lambda,$$

$$\dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial y^3} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y^3} = -mg + \lambda;$$

$$\dot{y}^i = \frac{p_i}{m};$$

$$f = ay_1 + by_2 + y_3 = 0,$$

јер је

$$H = E_k + E_p = \frac{\delta^{ij}}{2m} p_i p_j + mgy_3.$$

Следи
$$\ddot{f} = \frac{1}{m}(\dot{p}_1 + \dot{p}_2 + \dot{p}_3) = 0.$$
Помоћу извода импулса кретања $\dot{p}_i$ из једначина (3.17) и претходне једначине добија се
$$\lambda = \frac{mg}{1 + a^2 + b^2}.$$
Кординате тражене силе су:
$$R_1 = \frac{mga}{1 + a^2 + b^2}, \quad R_2 = \frac{mgb}{1 + a^2 + b^2}, \quad R_3 = \frac{mg}{1 + a^2 + b^2},$$
а величина тражене силе је $R = mg(1 + a^2 + b^2)^{1/2}$.

2. Помоћу Хамилтоновог хомогеног система једначина (3.А) и (3.Б) поступак за решење задатка је следећи:
$$f(y^1, y^2, y^3) = 0 \to y^3 = -ax - by = -aq^1 - bq^2; \quad (q^1, q^2) \in M^2.$$
$$E_k = \frac{m}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2) = \frac{m}{2}[(1 + a^2)\dot{(q^1)}^2 + 2ab(\dot{q}^1\dot{q}^2 + (1 + b^2)\dot{(q^2)}^2];$$
$$p_1 = m\big((1 + a^2)\dot{q}^1 + ab\dot{q}^2\big), \quad p_2 = m\Big((ab\dot{q}^1 + (1 + b^2)\dot{q}^2\big);$$
$$\Delta = 1 + a^2 + b^2,$$
$$\dot{q}^1 = \frac{(1 + b^2)p_1 - abp_2}{m\Delta}, \quad \dot{q}^2 = \frac{(1 + a^2)p_2 - abp_1}{m\Delta}.$$
$$H = E_k + E_p = \frac{1}{2m}[(1 + a^2)p_1^2 + 2abp_1p_2 + (1 + b^2)p_2^2] + mg(aq^1 + bq^2).$$
Једначине (3.А):
$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q^1} = -\frac{\partial E_p}{\partial q^1} = -mag = Q_1,$$
$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q^2} = \frac{\partial E_p}{\partial q^2} = -mbg = Q_2,$$
јасно показују да генералисане силе Q_α не садрже силу R.

Пример. Хамилтон је разматрао систем два тела, као материјалне тачке, са познатом функцијом силе, ([6], стр. 199-200),
$$U = m_1 m_2 f(r)$$
где је
$$r = \big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\big)^{1/2}.$$

За ([6], стр. 207-212)

$$f(r) = \frac{1}{r}$$

Хамилтон је разматрао кретање планета и комета, подчињеним Њутновом закону гравитације. Задатак је тако сводљив на интегралење диференцијалних једначина кретања. У овом случају, кад је функција силе

$$U = m_1 m_2 f(r) = m_1 m_2 \big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\big)^{-1/2},$$

сила се може одредити и без једначина (3.А) и (3.Б). Помоћу дефиниција функције сила:

$$F_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} = m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{r^3},$$
$$F_{y_1} = \frac{\partial U}{\partial y_1} = m_1 m_2 \frac{y_1 - y_2}{r^3},$$
$$F_{z_1} = \frac{\partial U}{\partial z_1} = m_1 m_2 \frac{z_1 - z_2}{r^3},$$

лако се добија да је

$$F_1 = -\big(F_{x_1}^2 + F_{y_1}^2 + F_{z_1}^2\big)^{1/2} = -\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Ако је функција U позната, такође је позната и одговарајућа сила. Али ми под појмом *инверзни проблем* сматрамо задатак да се *одреди непозната сила на основу довољног броја познатих атрибута кретања - положаја или трајекторије, брзине, или трајекторије и импулса кретања.*

Наш приступ наведеном примеру кретања две материјалне тачке, маса m_1 и m_2, састоји се уодређивању силе F_1, којом тело масе m_1 дејствује на тело масе m_2. Кретање је условљено везом

$$f = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - \rho^2(t) = 0. \tag{3.19}$$

Дифферентијалне једначине кретања (3.17) за овај пример су:

$$m_1 \ddot{x}_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad m_1 \ddot{y}_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad m_1 \ddot{z}_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial z_1};$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad m_2 \ddot{y}_2 = \lambda \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad m_2 \ddot{z}_2 = \lambda \frac{\partial f}{\partial z_2}.$$

Непознати множилац λ може бити одређен помоћу једначине (3.19):

$$\dot{f} = 2[(x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + (z_2 - z_1)(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - \rho\dot{\rho}] = 0;$$

$$\ddot{f} = 2[(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) + (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) - \dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho}] = 0$$

Заменом $\ddot{y}^i$ из једначине кретања у претходне једначине кретања добија се

$$\lambda = \frac{\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho} - v_{or}^2}{m_1 + m_2}\frac{m_1 m_2}{\rho^2}.$$

Како је

$$F_1 = -\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2},$$

добија се сила у облику (3.7), тј.

$$F_1 = -\chi\frac{m_1 m_2}{\rho}, \tag{3.20}$$

где је

$$\chi = \frac{\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho} - v_{or}^2}{m_1 + m_2}.$$

Тек, ако се материјалне тачке сматрају планетама Сунчевог система и узму у обзири Кеплерови закони, тј. релације

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \quad \rho^2\dot{\theta} = C = \frac{2ab\pi}{T},$$

формула (3.20) своди се на

$$F = -\frac{4\pi^2 a^3}{(m_1 + m_2)T^2}\frac{m_1 m_2}{\rho^2} = -k\frac{m_1 m_2}{\rho^2}, \tag{3.21}$$

где је

$$k = \frac{4\pi^2 a^3}{(m_1 + m_2)T^2}$$

фактор пропорционалности, познат као гравитациона константа.

Размотримо сада решење истог претходног примера помоћу Хамилтонових променљивих: $x, y, z; p_x, p_y, p_z$. Хамилтонове једначине кретња за претходни пример кретања два тела на растојању $\rho(t)$, трансформишу се на:

$$\dot{x}_1 = \frac{p_{1x}}{m_1}, \quad \dot{y}_1 = \frac{p_{1y}}{m_1}, \quad \dot{z}_1 = \frac{p_{1z}}{m_1};$$

$$\dot{x}_2 = \frac{p_{2x}}{m_2}, \quad \dot{y}_2 = \frac{p_{2y}}{m_2}, \quad \dot{z}_2 = \frac{p_{2z}}{m_2}. \tag{22}$$

$$\dot{p}_{1x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \dot{p}_{1y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \dot{p}_{1z} = \lambda\frac{\partial f}{\partial z_1}; \tag{3.23}$$

$$\dot{p}_{2x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \dot{p}_{2y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \dot{p}_{2z} = \lambda \frac{\partial f}{\partial z_2}. \tag{3.24}$$

Услови везе за брзину и убрзање постају:

$$\dot{f} = 2[(x_2 - x_1)(\frac{p_{2x}}{m_2} - \frac{p_{1x}}{m_1}) + (y_2 - y_1)(\frac{p_{2y}}{m_2} - \frac{p_{1y}}{m_1}) + (z_2 - z_1)(\frac{p_{2z}}{m_2} - \frac{p_{1z}}{m_1}) - \rho\dot{\rho}] = 0;$$

$$\ddot{f} = 2[(\frac{p_{2x}}{m_2} - \frac{p_{1x}}{m_1})^2 + (\frac{p_{2y}}{m_2} - \frac{p_{1y}}{m_1})^2 + (\frac{p_{2z}}{m_2} - \frac{p_{1z}}{m_1})^2 +$$
$$(x_2 - x_1)(\frac{\dot{p}_{2x}}{m_2} - \frac{\dot{p}_{1x}}{m_1}) + (y_2 - y_1)(\frac{\dot{p}_{2y}}{m_2} - \frac{\dot{p}_{1y}}{m_1}) + (z_2 - z_1)(\frac{\dot{p}_{2z}}{m_2} - \frac{\dot{p}_{1z}}{m_1})] -$$
$$2(\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho}) = 0.$$

Заменом првих извода импулса $\dot{p}_i$ из једначина кретања (3.23) и (3.24) у претходне релације, добија се

$$v_{or}^2 + \lambda[(x_2 - x_1)(\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{1}{m_2} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{1}{m_1}) + \ldots + (z_2 - z_1)(\frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{1}{m_2} - \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{1}{m_1})] = \dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho},$$

или краће

$$v_{or}^2 + \lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\rho^2 - \dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho} = 0, \tag{3.25}$$

јер је

$$(\frac{p_{2x}}{m_2} - \frac{p_{1x}}{m_1})^2 + (\frac{p_{2y}}{m_2} - \frac{p_{1y}}{m_1})^2 + (\frac{p_{2z}}{m_2} - \frac{p_{1z}}{m_1})^2 = v_{or}^2.$$

Према томе, поново се добија формула (3.20), али компликованијим и опширнијим поступком.

Наведени пример кретања два тела јасно показује да Хамилтон разматра овај задатак тако што полази од познате потенцијалне енергије или функције силе $F = 1/\rho$, а код Њутна сила фигурише у полазним једначинама (3.1).

Добијена формула (3.20) је општија од формуле (3.21). Њен значај најбоље се показује на примеру одређивања сила којим Сунце и Земља дејствују на Масец.

4. ДИНАМИЧКИ ПАРАДОКС У ТЕОРИЈИ МЕСЕЧЕВОГ КРЕТАЊА.

Стандардни приступ проблему. У велико тиражној књиги [8] на 64 страни насловљено је питање: **Зашто Месец не падне на Сунце?** "Питање може изгледати наивно" пише аутор, "али кад мислећи читаоци сазнају да Сунце привлачи Месец већом силом од Земље, испољавају неверицу и чуђење." Простим рачуном писац показује да је Сунчево привлачење веће од Земљиног као $\frac{330000}{160000}$, тј. више од два пута. У књизи вишег матматичког ранга ([9], стр. 149) наводи се конкретнији податак да је сила Сунца већа 2,5 пута од силе Земље. До таквог динамичког парадокса долази у теорији ако се наведене силе рачунају помоћу широко познате формуле величине силе "универзалне силе гравитације" (3.21), тј.

$$F = -k\frac{M_{\odot}m}{\rho_| odot^2}, \tag{4.1a}$$

где су: $M_{\odot}, m$ масе Сунца и маса Месеца (посматрани као материјалне тачке), ρ је растојање између центара маса. Конкретно, величина силе $F_{\odot}$, којом Сунце привлачи Месец масе m, је

$$F_{\odot} = -k\frac{M_{\odot}m}{\rho_{\odot}^2}, \tag{4.1a}$$

а величина силе $F_{\oplus}$, којом Земља привлачи Месец, је

$$F_{\oplus} = -k\frac{M_{\oplus}m}{\rho_{\oplus}^2}, \tag{4.1b}$$

Однос ових величина је

$$\frac{F_{\odot}}{F_{\oplus}} = \frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}}\frac{\rho_{\oplus}^2}{\rho_{\odot}^2}.$$

За познате бројне вредности [10],[11],[12]: $M_{\odot} = 19891 \times 10^{26}$ кг, $M_{\oplus} = 597 \times 10^{22}$ кг; $\rho_{\odot} = 1496 \times 10^8$ м, $\rho_{\oplus} = 384,4 \times 10^6$ м, следи да је

$$F_{\odot} \approx 2,1820 F_{\oplus},$$

и речима: Сила привлачења Месеца од стране Сунца већа је, приближно 2,1820 пута од силе Земље, којом Земља привлачи Месец. У књизи [9] налазимо да је

$$F_{\odot} = 2,5\, F_{\oplus}.$$

Дакле, теорија "Њутнове силе гравитације" у посматраном случају доводи до наведеног динамчког парадокса. Према томе не чуде следећи коментари високих стручњака за астрономију Месеца:

"Месец под једновременим дејством привлачења Земље и Сунца креће се по орбити око Земље, далеко од Кеплеровске." "Лунарна теорија - једна од најтежих проблема небеске механике - развијала се саствим различито од других планетарних теорија." ([13], стр. 9).

Аутортор овог рада полази од основних ставова класичне механике и математичке анализе. Сматрамо да положај материјалне тачке на путањи $s(t)$ одређује вектор положаја $\mathbf{r}(t)$. Кретање материјалне тачке посматрајмо у односу на природни координатни систем: тангенте орјентисане у смеру кретања јединичним вектором $\boldsymbol{\tau}_0$, основним вектором главне нормале $\mathbf{n}_0$, орјентисаном према центру кривине трајекторије, и основним вектором $\mathbf{b}_0$ бинормале. Познато је (види, на пример, [15], стр. 34) да се други извод вектора положаја $\mathbf{r}(t)$ по времену t може написати у облику

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = K(\frac{ds}{dt})^2\mathbf{n}_0 + \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau}_0, \tag{4.2}$$

где је K кривина криве путање у тачки $s(t)$; ds/dt је величина брзине, а $dv/dt = d^2s/dt^2$ величина тангентног убрзања у тренутку t, тј. тренутној тачки $s(t)$. Таква релација (4.2) налази се и у кинематици (види, на пример [14] стр. 30) у облику

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}_0 + \frac{v^2}{R_k}\mathbf{n}_0; \quad \mathbf{R}_k = \frac{1}{K}, \tag{4.3}$$

где је: $\ddot{\mathbf{r}}$ - убрзање, а v^2/R_k величина нормалног убрзања. Према томе, величина убрзања у било којој тачки трајекторије је

$$\mid \ddot{\mathbf{r}} \mid = \pm\sqrt{(\frac{dv}{dt})^2 + (\frac{v^2}{R_k})^2}. \tag{4.4}$$

Као што се види из (4.3), убрзање $\mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}}$ састоји се од збира тангентног и нормалног убрзања. Та констатација појашњава наведене Њутнове дефиниције V, VI, VII и $VIII$ (Књига прва) центрипеталних сила. Скаларним множењем релације (4.3) јединичним вектором $\boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{r}/r$, добијамо радијално убрзање,

$$w_r = \frac{\dot{r}^2 + r\ddot{r} - v_{or}^2}{r} = \frac{dv}{dt}\cos\phi + \frac{v^2}{R_k}\sin\phi; \quad R_k = \frac{1}{R_k}, \tag{4.5}$$

где угао φ заклапају тангента и радијус вектор у датој тачки трајекторије. Релације (4.3) и (4.4) показују да вектор убрзања лежи у равни. којој припадају правци базних вектора $\boldsymbol{\tau}_0$ и $\mathbf{n}_0$. Не губећи ништа од општости претходне анализе, уведимо у ту раван поларни координатни систем $\rho, \theta, \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\theta}_0$, у односу на који постоји радијална брзина $\dot{\rho}$ и трансвезална брзина $\rho\dot{\theta}$.

У односу на тај поларни систем координата из формуле (4.5) добија се радијално убрзање у облику

$$w_\rho = \frac{D\dot{\rho}}{dt} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \tag{4.6}$$

јер је,

$$v_{or}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2. \tag{4.7}$$

Важи и обратни доказ. Познато је и лако доказљиво да радијално убрзанје одговара коваријантном изводу радијалне брзине $\dot{\rho}$ по времену

$$w_\rho = \frac{D\dot{\rho}}{dt} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = \ddot{\rho} - \frac{\rho^2\dot{\theta}^2}{\rho}.$$

С обзиром на (4.7), одакле је $\rho^2\dot\theta^2 = v_{0r}^2 - \dot\rho^2$, добија се поново

$$w_\rho = \frac{\dot\rho^2 + \rho\ddot\rho - v_{or}^2}{\rho}. \tag{4.8}$$

У литератури, (види, на пример [17] стр. 194 и [20]) показано је колика су радијална убрзања на разним висинама H изнад Земље по стандардном обрасцу

$$\gamma = g\frac{R^2}{\rho^2},$$

као и по обрасцу

$$\ddot\rho = \gamma^* = \frac{v^2}{\rho},$$

који произилази из формуле (4.8) за кретање материјалних тачака, те и сателита, по кружним путањама.

Висине	Брзине	Убрзања	Убрзања
H км	v км/с	γ	γ^*
0	7,91	981,0	982,3
100	7,84	948,9	950,0
1000	7,35	732,1	733,0
10000	4,93	148,4	148,4
100000	1,94	3,5	3,5
384400	1,02	0,002693	0.002706

Приметимо да се последња врста табеле односи на средњу брзину кретања Месеца око Земље и његово средње растојање од центра Земље.

Кретање два тела. Показано је да се величина сила F узајамног дејства два тела, маса m_1 и m_2, која се крећу, сагласно Њутновим законима динамике I, II, III, на растојању $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\rho}$ између центара њихових маса, може написати у облику (3.6), а вечина радијалне силе F_ρ у облику (3.20), где је за посматрани критички случај, у средњем:

$$v_{or} = v_2 - v_1. \tag{4.9}$$

У Декартовом координатном систему то је

$$v_{or} = \sqrt{(\dot x_2 - \dot x_1)^2 + \cdots + (\dot z_2 - \dot z_1)^2}. \tag{4.10}$$

Приметимо да је $F = 0$ ако је $\ddot\rho = \rho\dot\theta^2$, као и то, да је

$$F = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{v_{or}^2}{\rho}, \tag{4.11}$$

ако је $\rho = const.$

Могуће решење проблема. Сагласно наведеном и формули (11), сила којом Земља масе, $M_\oplus = 5,97 \times 10^{24}\, kg$, задржава Месец, масе $m = 0,0739 \times 10^{24}\, kg$, на хипотетичној кружној путањи, на растојању $\rho = 384400\, km$ и средњој брзини $v = 1,02\, km/s$, била би једнака:

$$\mathcal{F}_\oplus = -\frac{M_\oplus m}{M_\oplus + m}\frac{v_{or}^2}{\rho_\oplus} = 0,987839876 \cdot \frac{(v_\oplus + 1,02 - v_\oplus)^2}{384400}\, m = \mathbf{0,0026736}\, m. \tag{4.12}$$

јер је

$$\frac{M_\oplus}{M_\oplus + m} = 0,987839878.$$

За Сунце, масе $M_\odot = 1,9891 \times 10^{30}$ кг и Месеца масе m сила привлачења ће бити

$$F_\odot = -\frac{M_\odot m}{M_\odot + m}\frac{v_{or}^2}{\rho_\odot}. \tag{4.13}$$

За бројне вредности маса следи:

$$\frac{M_\odot}{M_\odot + m} = \frac{19891 \times 10^{26}}{19891 \times 10^{26} + 0,000735 \times 10^{26}} = 0,999999.$$

За формулу (4.14), према (4.10), је:

$$F_\odot = 0,999999\frac{v_{or}^2}{149,6 \times 10^6}\ m.$$

Даљи рачун зависи, као што се види из (10), од бројне вредности брзине Сунца, а та брзина у астрономији није одредљива једним бројем.

У цитираној књизи ([8], стр. 167) пише следеће: "Све звезде (које припадају нашој галаксији - Млечном путу), у том броју и наше Сунце, крећу се једна у односу на другу средњом брзином $30 km/s$, тј. са таквом, са каквом наша планета прелази своју орбиту."

У књизи вишег математичког нивоа ([21], стр. 80 и 383) тачније се одређује брзина кретања Сунца у простору, галактичким координатама *apeksa* и величином вектора брзине; опште прихвачена значења елемената сматрају се: $l = 24^o, b = +22^o, V_0 = 20\, kms^{-1}$. Још прецизније у раду [23], који се ослања на књигу П.Г. Куликовског ([22], стр. 78) изложени су тражени подаци за брзину. У галактичком апексу L^o и B^o: за центроид 1214 звезда (4):

$$V = 29,6\, km\, s^{-1}, \quad L = 59^o, B = 26^o,$$

а за стандардно кретање

$$V = 19,5\, km\, s^{-1}, \quad L = 56^o, B = 23^o.$$

Израчунајмо силу гравитације Сунца за последње две брзине.

$$v_{or,1} = v_M - v_\odot = (v_\oplus + 1,02) - 29,6 = 29,8 + 1,02 - 29,6 = 1,22\, km\, s^{-1};$$
$$v_{or,2} = v_M - v_\odot = (v_\oplus + 1,02) - 19,5 = 29,8 + 1,02 - 19,5 = 11,32\, km\, s^{-1}.$$

Заменимо ли добијене бројне вредности у формули (4.13), као и $\rho_\odot = 149,6 \times 10^9\, m$ добија се величина силе, којом Сунце привлачи Месец, и то: при брзини Сунца $v_\odot = 29.6\, km/s$

$$\mathcal{F}_\odot(1,22) = 0,999999 \frac{1,22^2}{149,6 \times 10^6} = \mathbf{9,9491968 \times 10^{-6}}\, m,$$

а при брзини $v_\odot = 19,5\, km/s$,

$$\mathcal{F}_\odot(11,32) = 0,999999 \frac{11,32^2}{149,6 \times 10^6} = \mathbf{0,8565659 \times 10^{-3}}\, m.$$

Упоређењем са величином силе $2,6736436 \times 10^{-3} m$, којом Земља привлачи Месец, тј.

$$\frac{\mathcal{F}_\oplus}{\mathcal{F}_\odot} = \frac{2,6736436 \times 10^{-3} m}{0,8565668 \times 10^{-3} m} = 3,121348.$$

и

$$\frac{\mathcal{F}_\oplus}{\mathcal{F}_\odot} = \frac{2,6736436 \times 10^{-3} m}{9,9491968 \times 10^{-6} m} = 268,729592.$$

добија се да је сила Земље $\mathcal{F}_\oplus$ јача од одговарајуће силе Сунца $\mathcal{F}_\odot$ од 3 до 268 пута од силе којом Сунце привлачи Месец, под претпоставком да су путање кружне линије.

Елиптичко кретање. Познато је и великом тачношћу утврђено да се елиптицке путање Месеца и Земље мало разликују од крузних тајекторија. Приблизавање у прорачуну јос је веће, кад се зна да се Кеплерови закони односе на средња растојања. То јасно показују ексцентрицитет Месеца $e = 0,0549$ и ексцентрититет Земље $e = 0,0168$. За одржавање Месеца на елиптичкој путањи потребно је и довољно да радијално убрзање буде једнака нули, тј.

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = 0,$$

тј. да је

$$\ddot{\rho} = \rho\dot{\theta}^2, \tag{4.14}$$

јер је компонента трансвезалног убрзања w_θ, у смислу треће Њутнове аксиоме, једнако нули, тј.

$$w_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0.$$

Следи, као што је познато,

$$\rho^2\dot{\theta} = C = \frac{2\pi ab}{T},$$

где је T сидеричко време револуције Месеца. Даље, на основу једначине (4.14) добија се:

$$\gamma = \ddot{\rho} = \rho\frac{4\pi^2a^2b^2}{\rho^4T^2} = \frac{4\pi^2a^2b^2}{a^3T2} = \frac{4\pi^2}{T^2}a(1-e^2) = 0,0027136,$$

што је приближно једнако износу $0,002706555$, који се добија за кружно кретање. За кретање Месеца на средњој удаљености од Сунца (по усредњеној трајекторији на удаљености Земље од Сунца) добијамо још приближније резултате, с обзиром да је ексценритцитет Земље мањи од ексцентрицитета Месеца.

Дакле, са доста тачности независно од њутновске формуле гравитације отклоњен је разматрани динамички парадокс теорије Месечевог кретања. С обзиром да постоје схватања да тешкоће о Месечевом кретању састоје се у томе сто се не може применити класична пертурбациона теорија, укажимо и на неке несагласности у тој теорији.

Њутнов задатак одређивања селе, којом Сунце и Земља истовремено утичу на кретање Месеца помоћу класичне пертурбационе теорије, припада проблему три тела; отоме је предложено решење на другом месту. При томе треба имати у виду да и у пертурбационој теорији постоје несагласности. Зато наведимо и један наш прилог тој еорији.

5. СТАБИЛНОСТ СТАЊА КРЕТАЊА МЕХАНИЧКОГ СИСТЕМА.

У стручној литератури о поремећајима и стабилности непоремећеног стања кретања механичких система не подразумева се увек једно те исто. У општој теорији планетских поремећаја то су у најопштијем смислу диференцијалне једначине кретања, [28]

$$m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{G}_\nu \tag{5.1}$$

којим су додате силе поремећаја $\mathbf{G}_\nu$.

При описивању стања кретања система помоћу једначина (1.А) и (1.б) највише су распрострањене Поенкареове [25] једначине је поремећеног кретања у облику варијација

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta p_i &= -\frac{\partial^2 H}{\partial q^j\partial q^i}\delta q^j - \frac{\partial^2 H}{\partial p_j\partial q^i}\delta p_j,\\ \frac{d}{dt}\delta q^i &= \frac{\partial^2 H}{\partial q^j\partial p_i}\delta q^j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j\partial p_i}\delta p_j.\end{aligned} \tag{5.2}$$

У теорији стабилности кретања динамичких система диференцијалне једначине поремећеног кретања сведене су на опсти облик

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t, \xi), \quad \xi \in R^n \tag{5.3}$$

Једначине (5.1) суштински се разликују од осталих облика једначина и на основу њих разрађена је цела теорија планетских поремећаја, која, како пише наведени резензент не задовољава теорију о месечевом кретању. То је природно, јер те једначине не задовољавају препринцип инваријантности [1]. Други системи скаларних диференцијалних једначина формира се од основних диференцијалних једначина кретања развијањем у ред или варирањем функција и њихових извода.

У раду [26] доказано је да варијација пројекције вектора није једнака пројекцији вектора варијације, те уместо варијационих једначина (5.2) изведене су коваријантне диференцијалне једначине поремећаја у облику

$$\frac{D\eta_\alpha}{dt} = \psi_\alpha(t, \eta, \xi) \tag{5.4}$$

$$\frac{D\xi^\beta}{dt} = a^{\alpha\beta}\eta_\alpha. \tag{5.5}$$

Помоћу тих општих коваријантних једначина поремећеног кретања може се извести општи инваријантни критеријум о стабилности стања кретања сваког механичког система.

Под појмом инваријантни критеријум подразумева се општа мера у свим кординатним системима за оцену стабилности било којег непоремећеног кретања механичких система. Као такав обухвата стабилност равнотежног положаја и стања, стабилност стационарних кретања и стабилност кретања механичких система уопште, [1],[27].

Ако за диференцијалне једначине поремећаја (5.4) и (5.5) постоји позитивно дефинитна функција W поремећаја $\xi^0, \ldots, \xi^n$ и времена t, таква да је израз

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a^{\alpha\beta}\left(\Psi_\alpha + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)\eta_\beta \leq 0. \tag{5.6}$$

мањи или једнак нули, непоремећено стање кретања механичког система је стабилно.

Ако стварне (поремећене) силе $\mathbf{F}^*_\nu$ и усвојене (непоремећене) силе $\mathbf{F}$ из релација (5.6) , као и разлике $\mathbf{F}^*_\nu - \mathbf{F}_\nu$ не зависе експлицитно од времена t, ни функције Ψ_γ неће зависити експлицитно од времена t. Тада и функцију W треба тражити само у зависности од од поремећаја $\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^n$, $W = W(\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^n)$, па се изрази (5.6) и (5.9) своде на

$$a^{\alpha\beta}\left(\Psi_\alpha + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)\eta_\beta \leq 0.$$

Ако везе механичког система не зависе од времена, исчезавају величине $q^0, \xi^0, \eta_0, \Psi_0$, па се изрази (5.6), тј. (5.9), своди на

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a^{ij}\left(\Psi_i + \frac{\partial W}{\partial \xi^i}\right)\eta_j \leq 0,$$

а израз (5.10) на

$$a^{ij}\left(\Psi_i + \frac{\partial W}{\partial \xi^i}\right)\eta_j \leq 0$$

где функције Ψ_i и W не зависе од ξ^0 и η_0.

Сви изрази стабилности равнотежног стања система јављају се као последица израза (5.6) ако се ξ и η сматрају поремећајима q и p равнотежног стања, [29].

ЛИТЕРАТУРА

[1а] В.А. Виујичић, *Препринципи механике*, Завод за уџбенике, Београд, 1998; стр. 213.

[1б] V.A. Viujičić, *Preprinciples of Mechanics*, Matematički institut SANU, Beograd , 1999, p 225. (http://www.mi.sanu.ac.yu/main_pages/sva_izdanja.htm)

[2] И.Невтон, *Математические начала натуральной философии*, "Наука", Москва 1989, 689 пп.; Translated by Krylov A. N. from Isaaco Newton, *Philosophie naturalis principia mathematica*, Editio tretio, Londini,*MDCCXXVI*.

[3] V.A. Vujičić, *Dynamics of Rheonomic Systems*, Mathematical Institute SANU, Beograd, 1990, p.96.

[4] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко, *Савременая геометрия*, Москва, 1979.

[5] V.A. Vujičić, *Hamilton's invers problem*, Proceeding of International Congres of Serbian Soc. of Mechanics, Kopaonik, 2007, pp. 193-207.

[6] W.R. Hamilton, *Second Essay on a General Method in Dynamics*, Phil. Trans. Roy. Soc., p.1, 1835, pp. 95-144, Reprint: W.R Hamilton, Mth. Pap., T.2, Cambridge, 1940, pp. 162-212.

[7] Полак Л.С., *Вариационные принципи механики*-Ontology in russian, Гос.изд. Физматлит, Москва, 1959, п. 932.

[8] Я.И. Перельман, *занимательная астрономия*, издание 9-е, Физ.Мат-.Лит., Москва, 1958.

[9] V. Vujnović, *Astronomija, 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[10] A.Hannes, *Evolution of the Solar System*, National Aeronautics and Space Administration, Vashington, D.C, 1976.

[11] *Астрономический Ежегодник на 1999*, Astronomical Yearbook for 1999, Пулковская Обсерватория, Ст. Петербург, 1999.

[12] *The Astronomical Almanac for the Year 2000*, U.S. Governement Printing Office, Washington, DC 2000.

[13] *Physics and Astronomy of the Moon*, Second Edition, Edited Zdenek Kopal, Department of Astronomy, University of Manchester, Academic Pres (1971), p. 318.

[14] С.Л. Селешников, *Астрономия и космонаутика*, Наукава Думка, Кијев 1967.

[15] P.M. Miličić, *Kurs diferencijalne geometrije*, GNOSOS, Beograd 2005.

[16] Н.Г. Четаев, *Теоретическая мечаника* под редакцией В.В. Румянтсева и К.Е. Якимовой Наука, Москва, 1987.

[17] T. Andjelić, R. Stojanović, *Racionalna mehanika*, Zavod za udžbenike, Beograd, 1966.

[18] V.A. Vujičić, *On Hamilton's principle for the Rheonomous system*, Bulleten T.$XCVII$ de l'Academie Serbe des Sciences et des Arts Classe de Sciences mathematiques et naturelles, Sciences mathematiques No. 16, 1988, p. 37-50.

[19] V.A. Vujičić, *On the generalization of Newton's law of gravitation*, International Applied Mechanics, Vol. 40, No. 3, 2004; 351-359. (Translated from Prikladnaya Mekhanika, Vol. 40, No. 3, pp. 136-144), plenum Publishing Corporation, ttp://WWW.kluweronline.com/issn /1063-7095/current

[20] V.A. Vujičić, *On a generalization of Kepler's third law*, Asatronomical and Astrophysical Transactions, Vol. 24, No. 6, Taylor & Francis, 2005, 489-495

[21] К.Ф. Огородсников, *Динамика звездных систем*, Государственное издательство, Москва, 1958, п. 627.

[22] П.Г. Куликовский *Zvezdanaya astronomiya*, Наука, Москва 1978.

[23] A.S. Tomić and Dj. Koruga, *Asteroid belt and Dynamical arrangement of the Solar System to the nearest Star and background radiation*, IAU Cooloquium 197, Belgrade, 2004.

[24] В.А. Вујичић, *Тенсорное интегрирование в механике*, Международный Конгрес нелинейного анализа, Тезисы докладов, Петерсбург, 2007.

[25] Н.Г. Четаев, *Устойчивость движения*, Издание второе .Москва, 1955, стр.207.

[26] V.A. Vujičić, *Covariant equtions of disturbed motion system*, Tensor (NS), Vol. 22, 1971, pp. 41-47.

[27] V.A. Vujičić, *A non-standard approsch to the study of the dynamic sistem stability,*. Advances in Stability Theory, Stability and control: Theory, Metods and applications, Taylor and Francis, London, 13; 2003, pp. 189-200.

[28] М.Миланковић, *Небеска механика*, Сабрана дела, књига 3., Завод за уз2бенике, Београд, 1997.

[29] В.А. Вујичич и А.Мартынюк, *Некоторые задачи механики неавтономных систем,* Математички институт САНУ и Институт механики - Украинской академии наук. Београд-Киев, 1991, стр. 109.

[30] А.В. Гохман, *Дифференциально-геометрические основания классической динамики систем*, Москва, 1968.

[31] V.A. Vujičić, *Une formulation variationnelle du principle de Hertz dans l'espece de configuration*, Mat. vestn. 1964, 1, No 4.

[32] V.A. Vujičić, *Le traitement geometric du mouvement d'un systeme "a masse variable", le long des lignes geodesique.* Mat. ves., 1966, 3, No 1, 48-52.

[33] V.A. Vujičić, *On the covariant differential equations of motion of dynamical systems with variable mass.* Tensor, 1967, 18. No 2, 181-183.

[34] V.G. Veternikov i V.A. Sinicyn, *Метод переменного действия.* Fizmatlit, Moskva, 2002.

[35] V.A. Vujichich i V.V. Kozlov, *К теории реономных систем.* Vestn. MGU, Ser. 1, Mtematika, Mehanika, 1995.,No 5. s. 79-85.

Sent: Tuesday, June 03, 2008 11:56 AM

.