

## МОДЕЛИРАЊЕ ГРАНИЧНОГ УСЛОВА КЛИЗАЊА КОД СТРУЈАЊА У МИКРО-КАНАЛИМА/ЦЕВИМА ПОМОЋУ ФРАКЦИОНИХ ИЗВОДА

**Владан Ђорђевић**

Универзитет у Београду, Машински факултет,  
Краљице Марије 16, 11120 Београд, Србија  
E-mail: [vladj@rcub.bg.ac.yu](mailto:vladj@rcub.bg.ac.yu)

**Сажетак:** У раду се третира проблем струјања разређеног гаса у микро-каналима/цевима чија се дебљина/пречник мери у микро- или нанометрима. У таквим геометријама Кнудсенов број може да се мења од врло малих вредности својственим струјању континуума, до врло великих вредности која се срећу у слободном молекуларном кретању. У намери да покријемо целокупну област промене Кнудсенових бројева помоћу јединственог физичког модела, у раду се гранични услов клизања гаса по зиду моделира помоћу једног фракционог извода, чији ред на погодан начин зависи од локалне вредности Кнудсеновог броја у случају струјања у каналу, или од средње вредности овог броја у случају струјања у цеви. Добијено је одлично слагање са експериментима и резултатима нумеричке симулације.

**Кључне речи:** струјање у микро-каналима/цевима, гранични услов клизања, фракциони извод.

### 1 УВОД

Многи проблеми динамике разређених гасова су због своје практичне важности и теоретске атрактивности привукли значајну пажњу научне јавности у последње време. То се нарочито односи на унутрашња струјања гасова која се срећу у окружењима са малим притиском или вакумом, а такође и у геометријама микрометарских или субмикрометарских димензија на стандардним атмосферским условима. Примене у првој категорији укључују уређаје који се користе у хиперсоничном лету, и код више типова вакумских инструмената, као што су на пр. јонизациони детектори, анализатори парцијалног притиска и заосталих гасова, док се примене у другој категорији срећу у микро-електро-механичким системима (МЕМС), и укључују мале

акселерометре, сензоре притиска, микро-актуаторе, и др. Многе нове технике производње ових уређаја су се развиле у последње време у жељи да се њихова примена у нашем свакодневном животу учини могућом (преглед разних типова MEMS уређаја и производних техника дат је у [1]).

Једна од основних карактеристика струјања гаса у неком MEMS уређају је ефекат разређености који се манифестује у чињеници да Кнудсенов број  $Kn = \lambda / \beta$ , где је  $\lambda$  средња вредност слободног пута молекула, а  $\beta$  нека карактеристична дужина (дебљина  $h$  канала или пречник  $a$  цеви), није довољно мали тако да хипотеза о континууму не важи. Као резултат тога гас проклизава преко зидова канала, тако да се класични гранични услови приањања уз зид не могу применити. Грубо се може сматрати да се за  $Kn < 10^{-3}$  флуид може сматрати континуумом, док се за  $Kn > 10$  струјање мора третирати као слободно молекуларно кретање. Између ова два екстремна режима струјања потребна је финија класификација струјања на: струјање са клизањем за  $10^{-3} < Kn < 0.1$  и на транзиционо струјање за  $0.1 < Kn < 10$ . У литератури је посебна пажња посвећена формулацији граничних услова код режима са клизањем [2], и то како код струјања изазваних разликом притиска, тако и код струјања изазваних присуством тангенцијалног напона у струјном пољу. Ослањањем на апроксимативну анализу кретања једноатомног гаса у близини једне изотермске површине, у [2] је дефинисан тзв. гранични услов вишег реда, који омогућава добијање релативно једноставних аналитичких решења за стишљиво струјање са доминантним вискозним силама.

Њихово поређење са познатим експерименталним и нумеричким резултатима показало је веома добро слагање.

У релативно дугачким микро-каналима или цевима, код којих је притисак на улазу реда величине атмосферског притиска, а на излазу влада веома низак притисак, може се догодити да струјање пролази кроз све горе побројане режиме. У томе случају је веома пожељно располагати моделом за гранични услов клизања који би покрио све режиме струјања, од континуума до слободно молекуларног. Бескок и Карниадакис [3] су предложили први модел тог типа. Модел је уведен на потпуно емпиријски начин у облику тзв. “кофицијента разређености” помоћу којег се израз за масени проток, који се добија у случају релативно малих вредности Кнудсеновог броја у режиму клизања гаса, “коригује” тако да се обухвати цела област Кнудсенових бројева. Резултати који се на тај начин добијају за запремински и масени проток, као и за распоред притиска, могу се веома добро “фитовати” са резултатима директне симулације Монте Карло и решењима линеаризоване Болцманове једначине.

У овоме раду чини се један други покушај да се покрије цела област Кнудсенових бројева моделирањем граничног услова клизања помоћу фракционог извода. У ту сврху дефинише се једна верзија Капутовог извода [4] чији је ред  $\alpha$  функција локалне вредности Кнудсеновог броја у каналу, или функција погодна дефинисане средње вредности овог броја у цеви. За  $\alpha = 0$  гранични услови су класични услови приањања гаса уз зид код модела континуума, док за  $\alpha \rightarrow 1$  – Кнудсенов број тежи бесконачности и струјање

постаје слободно молекуларно. С обзиром да се фракциони изводи углавном користе за моделирање реолошких особина разних вискоеластичних материјала и за моделирање разних феномена у многим областима физике помоћу фракционих диференцијалних једначина, оваква њихова примена је према нашем сазнању веома специфична. Дакле, анализа спроведена у овој раду доприноси разноврсности примена фракционих извода с једне стране, а с друге, она ствара нову основу за описивање комплексних феномена струјања у динамици разређених гасова.

У тексту који следи биће приказани резултати наших сопствених резултата истраживања моделирања граничног услова клизања у случају струјања разређених гасова у микро-каналима и микро-цевима помоћу фракционих извода, публикованих раније у [5] и [6].

## 2 МИКРО-СТРУЈАЊЕ У КАНАЛИМА

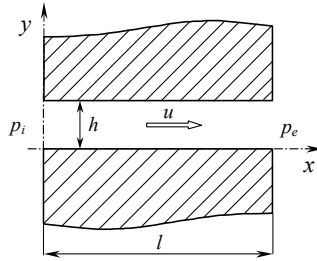
Проблем који се овде разматра представљен је на Сл. 1.  $h$  и  $l$  су редом висина и дужина канала,  $u(x, y)$  је пројекција брзине у правцу осе  $x$ , а  $p_i$  и  $p_e$  су редом притисак на улазу и излазу из канала. Ако претпоставимо да је  $h \ll l$ , и да је референтни Махов број довољно мали, моћићемо да користимо тзв. апроксимацију теорије подмазивања да бисмо описали изотермско струјање у каналу.

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx}, \quad (1)$$

где је  $\mu$  вискозност гаса, а  $p(x)$  притисак. Поред једначине (1) користићемо такође и једначину континуитета за стишљиву средину. Из ње, у овом једноставном случају струјања, следи да је масени проток гаса кроз канал  $\dot{M}$  константан, и зато је нећемо овде наводити.

Овде треба напоменути да, строго говорећи, Навије-Стоксове једначине и разни апроксимативни облици тих једначина, као што је на пр. (1), не могу довољно тачно да опишу струјање разређеног гаса, осим када  $Kn \rightarrow 0$ . Постоје напредније једначине чија важност покрива шири опсег Кнудсенових бројева, као што су Барнетове једначине, квазигасодинамичке једначине, и др. Међутим, оне су знатно компликованије и вишег су реда, тако да захтевају допунске граничне услове које је тешко дефинисати. С друге стране, метода директне симулације Монте Карло, која је заснована на молекуларном опису струјања, је по правилу веома компликована. Зато постоји једна тенденција у литератури да се за опис струјања користе Навије-Стоксове једначине (упркос њиховој недовољности!) са модификованим граничним условима клизања, да би се проширио опсег важности Кнудсенових бројева, и по могућству покрио чак цео опсег, од нуле до бесконачности, на један емпиријски начин. Као што је то споменуто у Уводу, радови Бескока и Карниадакиса [3], и Ђорђевића [5], [6], спадају у ту категорију радова.

Владан Ђорђевић



Слика 1. Струјање разређеног гаса у микро-каналу.

Један од граничних услова за решавање једначине (1) је услов симетрије:

$$y = \frac{h}{2} : \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Пошто је струјање у каналу разређено, други гранични услов је услов клизања:

$$y = 0 : \quad u = u_0(x). \quad (3)$$

У литератури је до сада начињено много покушаја да се моделира брзина клизања  $u_0(x)$ . Анализирајући тангенцијални флуks количине кретања у близини зида Бескок и др. [2] су предложили следећи модел за изотермски зид у миру:

$$u_0 = \frac{2 - \sigma}{2} u \Big|_{y=\lambda},$$

где је  $\lambda(x)$  слободни пут молекула, а  $0 < \sigma = const. < 1$  тзв. коефицијент акомодације. Ако се  $u(x, \lambda)$  развије у ред у околини  $y = 0$ , добија се из претходног:

$$u_0 = \frac{2 - \sigma}{\sigma} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} + \dots \right) \quad (4)$$

Овај модел даје веома добре резултате који су у сагласности и са нумеричким симулацијама и са експериментима у режиму клизања ( $10^{-3} < Kn < 0.1$ ).

Као што је речено у Уводу, ми желимо у овоме раду да проширимо валидност решења једначине (1) далеко ван режима клизања. У ту сврху дефинисаћемо једну верзију Капутовог извода на следећи начин (в. [4]):

$${}_y C_{\lambda}^{(\alpha)}(u) = \int_y^{\lambda(x)} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\eta} (\eta - y)^{-\alpha(x)} d\eta, \quad (5)$$

где су:  $0 \leq y \leq \lambda$  и  $0 \leq \alpha < 1$ , и претпоставићемо брзину клизања (3) у облику:

$$u_0 = \frac{2-\sigma}{\sigma} h^\alpha {}_0C_\lambda^{(\alpha)}(u). \quad (6)$$

Примећује се да је овде ред извода  $\alpha$  функција променљиве  $x$ . Уствари, ми желимо да директно повежемо овај ред са Кнудсеновим бројем  $Kn = \lambda(x)/h$ :  $\alpha = \alpha(Kn)$  на такав начин да је:  $\alpha(0) = 0$ , тако да се (6) своди на услов приањања какав се среће у струјањима у континууму, и да  $\alpha \rightarrow 1$  – када  $Kn \rightarrow \infty$ , што је ситуација која се среће код слободног молекуларног кретања. Дакле, да бисмо помоћу (6) покрили цео опсег промене Кнудсеновог броја, ми прилагођавамо ред фракционог извода (5) његовој локалној вредности у сваком попречном пресеку канала. Коефицијент испред извода (6) је додат из димензионих разлога, а такође и да би се наши резултати свели на резултате добијене у [2] у режиму клизања. При томе, наша очекивања су заснована на познатој особини фракционих извода да они репрезентују особине неке функције у коначном интервалу ( $0 \leq y \leq \lambda(x)$  у овом случају), за разлику од целобројних извода, примењених за моделирање брзине клизања у (4), који репрезентују локална својства функције.

### 3 РЕЗУЛТАТИ И ДИСКУСИЈА ЗА МИКРО-КАНАЛЕ

Математички проблем дефинисан једначином (1) и граничним условима (2) и (6) је коректно постављен и једноставан. Рутински се могу добити следећи резултати, редоследом којим се они јављају у току поступка решавања:

- брзина клизања:

$$u_0 = \frac{2-\sigma-h^2}{\sigma} \frac{dp}{2\mu dx} K \quad (7)$$

- профил брзине:

$$u = \frac{-h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2} + \frac{2-\sigma}{\sigma} K \right) \quad (8)$$

- запремински проток:

$$Q = 2 \int_0^{h/2} u dy = \frac{-h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \left( 1 + 6 \frac{2-\sigma}{\sigma} K \right) \quad (9)$$

- масени проток:

$$\dot{M} = \rho Q = \frac{p}{RT} Q = \frac{-h^3}{12\mu RT} p \frac{dp}{dx} \left( 1 + 6 \frac{2-\sigma}{\sigma} K \right) \quad (10)$$

где је:  $K = Kn^{(1-\alpha)} / (1-\alpha) - 2Kn^{(2-\alpha)} / (2-\alpha)$ ,  $R$  је гасна константа,  $T$  је константна температура гаса, и где је коришћена једначина стања за идеални гас у облику:  $p = \rho RT$ . Као што је добро познато [7], Кнудсенов број је обрнуто пропорционалан притиску у случају изотермског струјања. Дакле,  $Kn = Ke/P$ , где је  $Ke$  референтни Кнудсенов број изабран у излазном пресеку канала, и

$$P = p / p_e.$$

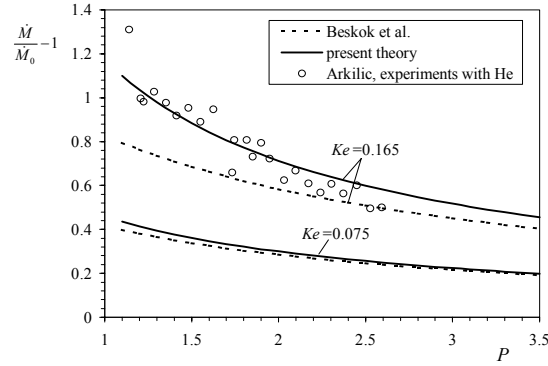
У следећем кораку изабраћемо зависност  $\alpha(Kn)$  тако да добијемо што је могуће боље слагање са постојећим експериментима и нумеричким симулацијама. За  $Kn \ll 1$  претпоставићемо да  $\alpha(Kn)$  дозвољава следећи развој у ред:

$$\alpha = aKn^2(1 + a_1Kn + O(Kn^2)) \quad (11)$$

Одговарајући развој (првог реда!) за  $K$  може се сада добити у следећем облику:

$$\frac{\dot{M}}{\dot{M}_0} - 1 = \frac{2 - \sigma}{\sigma} \frac{12Ke}{P_i^2 - 1} \left[ P_i - 1 - Ke \ln P_i + 2aKe^2 \left( 1 - \frac{1}{P_i} \right) - aKe^2 \left( \ln Ke + \frac{1}{P_i} \ln \frac{P_i}{Ke} \right) \right], \quad (13)$$

где  $\dot{M}_0 = h^3 p_e^2 (P_i^2 - 1) / 24\mu RTl$  представља масени проток кроз канал у случају када се занемари ефекат разређености. Дакле, израз (13) представља уствари релативно повећање масеног протока у каналу због клизања гаса преко његових зидова. То повећање је представљено на Сл. 2 у зависности од односа притиска  $P_i$  за две вредности  $Ke$ ,  $\sigma = 1$  (релативно храпави зид!), и за вредност коефицијента  $a = 4.6$ . Наша теорија даје само мало веће вредности од оних представљених у [2] за релативно малу вредност параметра  $Ke = 0.075$ . За релативно велику вредност  $Ke = 0.165$  теорија даје знатно веће вредности од оних у [2], али се зато оне много боље слажу са експериментима Аркилика и др. [8].



**Слика 2.** Поређење резултата за релативно повећање масеног протока кроз канал са резултатима Бескока и др. [9], и са експериментима.

За  $Kn \gg 1$  претпоставићемо да  $\alpha(Kn)$  дозвољава следећи асимптотски развој:

$$1 - \alpha = \frac{b}{aKn} \left( 1 + \frac{b_1}{Kn} + O(Kn^{-2}) \right). \quad (14)$$

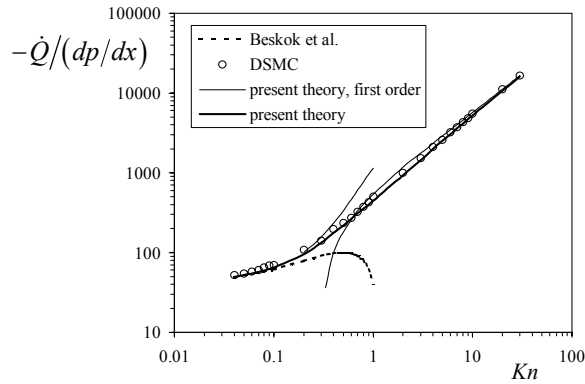
Тада ће одговарајући развој за  $K$  гласити:

$$K = \left(\frac{a}{b} - 2\right)Kn + \left(1 - 2\frac{b}{a}\right)\ln Kn + O(1). \quad (15)$$

Ако се овај израз уврсти у (9) добиће се запремински проток кроз канал:

$$Q = \frac{-h^3}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{2-\sigma}{\sigma} \left[ \left(\frac{a}{b} - 2\right)Kn + \left(1 - 2\frac{b}{a}\right)\ln Kn + O(1) \right]. \quad (16)$$

На Сл. 3 овај израз за запремински проток пореди се са резултатима директне нумеричке симулације Монте Карло, за  $\sigma = 1$  и изабрану вредност  $b = 1.08$ . Слагање за  $Kn > 10$  је одлично. На истој слици наноси се решење првог реда за  $Kn \ll 1$  ((12) уврштено у (9)) и такође добија одлично слагање са резултатима симулације Монте Карло. Може се такође закључити да наше решење првог реда (16) пружа одличну апроксимацију за запремински проток у целом интервалу  $0 \leq Kn \leq 0.2$ , док решење првог реда предложено у [2] не може да задовољавајуће резултате за  $Kn > 0.1$ .



Слика 3. Поређење резултата за запремински проток са резултатима Бескока и др. [2], и са ДСМК симулацијама, у целој области Кнудсенових бројева.

Охрабрени том чињеницом ми смо сада у стању да предложимо једну рационалну функцију као апроксимацију за  $\alpha(Kn)$ , која дозвољава оба развоја, (11) и (14):

$$\alpha = \frac{aKn^2}{1 + bKn + aKn^2}, \quad (17)$$

са  $a = 4.6$  и  $b = 1.08$ , а која покрива целу област промене Кнудсеновог броја. Прорачуни коришћењем (17) нанешени су на Сл. 3 и упоређени са резултатима Монте Карло. Изванредно слагање у целој области Кнудсенових бројева је очигледно.

#### 4 МИКРО-СТРУЈАЊЕ У ЦЕВИМА

Под истим физичким условима као и у случају струјања у каналима (в. 2), основна једначина за струјање у цевима, и са истим ознакама, гласи:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{dp}{dx}, \quad (18)$$

где је  $r$  радијална координата. Гранични услови који одговарају условима (2) и (3) код струјања у каналу су редом:

$$r = 0 : \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad r = a : u = u_0(x).$$

Решење једначине (18) за било коју брзину клизања гласи:

$$u = u_0(x) - \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} y(2a - y), \quad (19)$$

где је  $y = a - r$  растојање од зида. Брзину клизања моделираћемо на исти начин као и код струјања у каналу (6):

$$u_0 = \frac{2 - \sigma}{\sigma} a^\alpha {}_0 C_\lambda^{(\alpha)}(u), \quad (20)$$

где је  ${}_0 C_\lambda^{(\alpha)}(u)$  дефинисано тачно као у (5).

У случају струјања у каналу ред извода  $\alpha$  је био функција од  $x$  преко локалне вредности Кнудсеновог броја у каналу. Међутим, у случају струјања кроз микро-цеви, у литератури постоји значајан недостатак експерименталних података. По правилу, све карактеристичне величине у овом случају дају се преко средње вредности овог броја, која је дефинисана у односу на средњи притисак у цеви. То такође важи и за резултате нумеричке симулације, као и за решења линеаризоване Болцманове једначине. Зато ћемо сада претпоставити да је  $\alpha$  функција средњег Кнудсеновог броја у цеви, који ће бити обележен са  $\tilde{Kn}$ , и биће према томе константа за сваки посебни случај струјања

#### 5 РЕЗУЛТАТИ И ДИСКУСИЈА ЗА МИКРО-ЦЕВИ

Проблем постављен једначинама (19) и (20) може се лако решити. Добијају се следећи резултати:

- брзина клизања:

$$u_0 = - \frac{2 - \sigma}{\sigma} \frac{a^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \tilde{K},$$

- профил брзине:

$$u = - \frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[ \frac{y}{a} \left( 2 - \frac{y}{a} \right) + 2 \frac{2 - \sigma}{\sigma} \tilde{K} \right],$$

- запремински проток:



$$Q = \int_0^a 2r\pi\mu dr = -\frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{dp}{dx} \left( 1 + 4 \frac{2-\sigma}{\sigma} \tilde{K} \right),$$

- средња брзина:

$$U = \frac{Q}{\pi a^2} = -\frac{a^2}{8\mu} \left( 1 + 4 \frac{2-\sigma}{\sigma} \tilde{K} \right),$$

. масени проток израчунат приближно помоћу средње густине  $\tilde{\rho}$  у цеви:

$$\dot{M} \approx \tilde{\rho} Q = \frac{\tilde{p}}{RT} Q = -\frac{\pi a^4}{8\mu RT} \tilde{p} \frac{dp}{dx} \left( 1 + 4 \frac{2-\sigma}{\sigma} \tilde{K} \right), \quad (21)$$

где је:  $\tilde{K} = \tilde{K}n^{(1-\alpha)} / (1-\alpha) - \tilde{K}n^{(2-\alpha)} / (2-\alpha)$ ,  $\tilde{p} = (p_i + p_e) / 2$  је средњи притисак у цеви ( $p_i$  - притисак на улазу,  $p_e$  - притисак на излазу), и где је коришћена једначина стања за идеални гас у облику:  $\tilde{p} = \tilde{\rho} RT$ . Добро је познато [7] да важи следећа релација за средњу вредност Кнудсеновог броја:

$$\tilde{K}n = \frac{\mu}{a\tilde{p}} \sqrt{\frac{\pi RT}{2}},$$

што значи да је он обрнуто пропорционалан средњем притиску код изотермског струјања.

Масени проток је константан према једначини континуитета, тако да се израз (21) може лако интегралити између  $x = 0$  и  $x = l$ , при чему се добија:

$$\dot{M} = \frac{\pi a^4 (p_i - p_e) \tilde{p}}{8\mu RT l} \left( 1 + 4 \frac{2-\sigma}{\sigma} \tilde{K} \right).$$

Даље се овај израз може написати у бездимензионом облику коришћењем две добро познате формуле за масени проток  $\dot{M}_C$  код струјања у механици континуума ( $\tilde{K}n = 0$ ), и  $\dot{M}_{FM}$  код слободног молекуларног кретања ( $\tilde{K}n \rightarrow \infty$ ):

$$\dot{M}_C = \frac{\pi a^4}{16\mu RT l} (p_i^2 - p_e^2), \quad \dot{M}_{FM} = \frac{4a^3 (p_i - p_e)}{3l} \sqrt{\frac{2\pi}{RT}}, \quad (22)$$

па се добија:

$$\frac{\dot{M}}{\dot{M}_C} = 1 + 4 \frac{2-\sigma}{\sigma} \tilde{K}, \quad \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{FM}} = \frac{3\pi}{64\tilde{K}n} \left( 1 + 4 \frac{2-\sigma}{\sigma} \tilde{K} \right).$$

Наш следећи корак састојаће се у избору  $\alpha(\tilde{K}n)$  тако да се добије што је могуће боље слагање са резултатима у литератури. Прецизније, ми желимо да “фитујемо” наше резултате са решењима линеаризоване Болцманове једначине добијеним од стране Лојалке и Хамудија [9]. За  $\tilde{K}n \gg 1$  претпоставићемо

следећи асимптотски развој за  $\alpha(\tilde{Kn})$ :

$$\alpha = 1 - \frac{A}{\tilde{Kn}} + h.o.t. \quad (23)$$

где је  $A$  произвољна константа. Тада се рутински може добити следећи развој за  $\tilde{K}$ :

$$\tilde{K} = \frac{1-A}{A} \tilde{Kn} + (1-A) \ln \tilde{Kn} + A + h.o.t.$$

Ако се он уврсти у другу од једначина (22) за  $\sigma = 1$ , и примени услов: кад  $\tilde{Kn} \rightarrow \infty$ ,  $\dot{M} \rightarrow \dot{M}_{FM}$ , добиће се следећа вредност константе  $A$ :  $A = (3\pi + 16)/3\pi \approx 0.3707$ . Мало прецизнија анализа показује да је облик прва два члана у (23) једини који доводи до коначне вредности масеног протока за  $\tilde{Kn} \rightarrow \infty$ .

За  $\tilde{Kn} \ll 1$  претпоставићемо следећи облик развоја за  $\alpha(\tilde{Kn})$ :

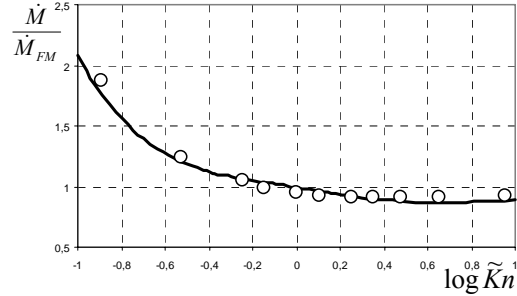
$$\alpha = B\tilde{Kn}^n + h.o.t. \quad (24)$$

са  $n > 1$ . Тада је развој за  $\tilde{K}$ :

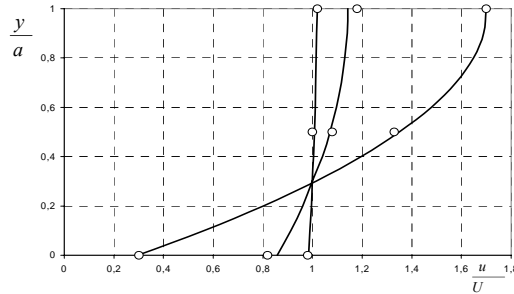
$$\tilde{K} = \tilde{Kn} - \frac{1}{2} \tilde{Kn}^2 + B\tilde{Kn}^{n+1} (1 - \ln \tilde{Kn}) + h.o.t.$$

Ако се само прва два члана овог развоја употребе у прорачунима, могуће је лако уверити се да се добијени резултати тачно поклапају са резултатима који се добијају у режиму клизања када се користи гранични услов (4). Смисао увођења коефицијента  $(2 - \sigma)/\sigma$  у наш гранични услов (20) управо лежи у потреби да се поменута два решења покlope у режиму клизања. Међутим, док се ред (4) прекида код другог члана у овом случају струјања, зато што је профил брзине параболчан, ми имамо чланове вишег реда у развоју за  $\tilde{K}$ . Ови чланови могу да послуже као корекција када желимо да проширимо важност теорије на веће вредности  $\tilde{Kn}$ . Ако се то учини коришћењем прва три члана у развоју, тада “фитовање” са резултатима Лојалке и Хамудија [9], наведеним у [7] (в. Сл. 5.11), у интервалу  $0 \leq \tilde{Kn} \leq 0.3$  даје следеће вредности за  $B$  и  $n$ :  $B = 1.9$ ,  $n = 1.8$ .

Охрабрени тиме, сада смо у стању да предложимо следећу зависност  $\alpha(\tilde{Kn})$  која би требало да покрије целу област промене Кнудсеновог броја:



**Слика 4.** Зависност бездимензионог масеног протока од средње вредности Кнудсеновог броја, и његово поређење са решењем линеаризоване Болцманове једначине [9] ( $A = 0.3707, B = 1.9, n = 1.8$ ).



**Слика 5.** Бездимензиони профили брзине у цеви за различите вредности средњег Кнудсеновог броја, и њихово поређење са решењима Болцманове једначине [9].

$$\alpha = \frac{B\tilde{K}n^n}{1 + AB\tilde{K}n^{n-1} + B\tilde{K}n^n}, \quad (22)$$

са нумеричким вредностима константи  $A, B$  и  $n$  као што су горе наведене. Можемо се лако уверити да (25) дозвољава оба развоја (23) и (24). Користећи (25) нанећемо сада на Сл. 4 зависност  $\dot{M}/\dot{M}_{FM}$  од  $\tilde{K}n$ , и поредићемо те резултате са резултатима добијеним у [9]. Слагање је веома добро, јер одступања не прелазе 5%. Тзв. Кнудсенов минимум није тако изражен у овом случају струјања, као што је то био код струјања у микро- каналу [5], али се ипак јасно уочава код приближне вредности  $\tilde{K}n \approx 4$ .

Најзад, на Сл. 5 су приказани профили брзине, учињени бездимензионим помоћу средње брзине  $U$ , за разне вредности Кнудсеновог броја. Примећује се интензиван пораст вредности брзине клизања са растом Кнудсеновог броја, и истовремени пад максималне брзине у оси цеви, тако да је профил за  $\tilde{K}n > 10$

скоро униформан. Слагање са резултатима Лојалке и Хамудија [9], добијеним решавањем линеаризоване Болцманове једначине, је такође веома добро и у овом случају.

## 6 ЗАКЉУЧЦИ

У раду је показано да се фракциони изводи могу успешно применити при моделирању брзине клизања у случају струјања разређеног гаса у каналима и цевима микро и нано размера. Дефинишући једну верзију Капутовог извода и прилагођавајући његов ред локалној вредности Кнудсеновог броја у каналу, или његовој средњој вредности у цеви, показује се да је могуће покрити целу област промене Кнудсеновог броја, од струјања гаса у оквирима механике континуума, па до слободног молекуларног кретања, користећи само један једини гранични услов клизања. Поступак спроведен у овоме раду указује на могућност примене фракционих извода на исти начин и код других, комплекснијих проблема динамике разређених гасова. Поред тога, коришћење фракционог извода, спроведено у овоме раду, веома је специфично, зато што се фракциони извод не употребљава за моделирање реолошких особина вискоеластичних материјала, нити се користи за модификацију разних диференцијалних једначина које се јављају у математичкој физици. Тиме се проширује област примене овог значајног математичког апарата у физици.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ho, C.-M., Tai, Y.-C., Review: MEMS and its applications for flow control, ASME J. Fluids Eng. 118, No.3, pp.437-447, 1996/
- [2] Beskok, A., Karniadakis, G.E., Trimmer, W., Rarefaction and compressibility effects in gas microflows, ASME J. Fluids Eng. 118, No.3, pp.448-456, 1996
- [3] Beskok, A., Karniadakis, G.E., A model for flows in channels, pipes, and ducts at micro and nano scales, Microscale Thermophysical Engineering 3, pp.43-77, 1999.
- [4] Podlubny, I., Fractional Differential Equations, Academic Press, 1999.
- [5] Djordjevic, V. D., Modeling of the slip boundary condition in rarefied gas micro-channel flow via fractional derivative, Proc. 1<sup>st</sup> IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, ENSEIRB, Bordeaux, pp. 363-367, 2004.
- [6] Djordjevic, V. D., On the rarefied gas flow in pipes, Proc. ASME Int. Eng. Conference – DETC2005, Vol. 6B, pp.1591-1595, 2005.
- [7] Karniadakis, G.E., Beskok, A., Micro Flows, Fundamentals and Simulation, Springer-Verlag New York, Inc., 2002.
- [8] Arkilic, E., Breuer, K.S., Schmidt, M.A., Gaseous flow in microchannels, ASME FED – Vol. 197, Application of Microfabrication to Fluid Mechanics, pp.57-66, 1994.
- [9] Loyalka, S. K., Hamoodi, S. A., Poiseuille flow of a rarefied gas in a cylindrical tube: Solution of linearized Boltzmann equation, Phys. Fluids A 2 (11), pp. 2061-2065, 1990.

Sent: Saturday, May 17, 2008, 9:19 PM