Monograph of Academy of Nonlinear Sciences
Advances in Nonlinear Sciences II - Sciences and Applications, Belgrade
Теория дифференциальных уравнений, возникающих в динамике систем твердых тел с Кулоновым трением 2008, Vol. 2, pp. 17-107

ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ДИНАМИКЕ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С КУЛОНОВЫМ ТРЕНИЕМ

Владимир М. Матросов[1] и Иван А. Финогенко[2]

[1]Российцкая акдемия наук, Москва, Россия
E-mail: <ciund@orc.ru>

[2] Институт динамики систем и теории управления,
Сибирское отделение Российской академии наук, Иркутск, Россия
E-mail: <fin@icc.ru>

Аннотация. *Излагается разработанная авторами теория правосторонних решений уравнений динамики для механических систем с трением скольжения в одностепенных кинематических парах. Обсуждаются трудности связанным с "неединственностью" или "невозможностью" движения при описании таких систем, которые обычно называют парадоксами П. Пэнлеве. На основе анализа уравнений движения указаны причины появления и возможные пути преодоления этих трудностей.*

Клучевые слова: *законы Кулона, сухое трение, парадоксы Пэнлеве, уравнения динамики механических систем с трением, правостороннее решение, устойчивость.*

1 ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. История вопроса.

Впервые вопрос о возможности создания для систем с трением общей теории, аналогичной той, которую дают уравнения Лагранжа применительно к системам без трения, был поставлен П. Пэнлеве в его работе "Лекции о трении" [1]. В ней для систем абсолютно твердых тел введено общее определение сил трения и рассмотрен вопрос о совместности связей. Описывая общие свойства законов трения, П. Пэнлеве указал, что они являются достаточно грубыми эмпирическими законами и применимы лишь в определенных границах, а при больших значениях коэффициентов трения применение законов Кулона приводит к неопределенностям. Эти феномены, получившие названия "парадоксы Пэнлеве" сухого трения, вызвали дискуссию, в которой приняли участие многие выдающиеся механики того времени, такие как Л. Лекорню, де Спарр, Ф. Клейн, Р. Мизес, Г. Гамель, Л. Прандтль, Ф. Пфейфер (см. [1]), Е.А. Болотов [2] (см. также [3]), позднее – Н.В. Бутенин [4], Н.А. Фуфаев [5], Ю.И. Неймарк, [6]-[8], А.П. Иванов [9], В.В. Никольский, Ю.П. Смирнов [10]-[12], С.С. Григорян [13], С.В. Белокобыльский [14], и др. Подробный обзор соответствующих публикаций имеется в книге Ле Суан Аня [15], Но и в настоящее время работы, посвященные анализу парадоксов Пэнлеве, носят дискуссионный характер.

Отметим, что парадоксы, выявленные П. Пэнлеве, проявляются не в физической природе трения, а в способах его описания методами теоретической механики. Они проявляются в возможной противоречивости уравнений движения механических систем с трением с использованием предположения об абсолютной жесткости контактирующих (трущихся тел) и закона Кулона. Сам же П. Пэнлеве пришел к выводу, что "между динамикой твердого тела и законами Кулона имеется логическое противоречие при условиях, которые могут быть осуществлены в действительности" [1]. Тем не менее, использование законов Кулона в предположении абсолютной жесткости трущихся тел во многих случаях оправдано и хорошо себя зарекомендовало на практике.

Трение – очень сложное физическое явление, не изученное до конца до сих пор. Законы трения изучались еще Леонардо да Винчи, который открыл, что при движении тела по горизонтальной поверхности на него действует сила препятствующая движению и зависящая от веса тела. К этим же выводам впоследствии пришел Г. Амонтон. Он полагал, что сила трения не зависит от скорости относительного движения трущихся тел. Ш.О. Кулон ввел понятие коэффициента трения и пришел к выводу, что его величина зависит от материала и состояния трущихся поверхностей и не зависит от площади контакта. Известную формулу $F = fN$ называют законом Амонтона-Кулона.

Кулон изучал силу трения при очень медленном взаимном перемещении трущихся тел. Но еще в 19-ом веке было установлено, что сила трения зависит от относительной скорости находящихся в соприкосновении тел. Был открыт штрибек-эффект: сила статического трения (в момент начала движения) отличается от силы трения в движении (больше) в зоне очень малых скоростей. Коэффициенты трения зависят не только от материалов, но от гладкости обработки поверхностей, которые всегда имеют неровности. Поэтому в реальности площадь контакта трущихся тел относительно мала. Сопротивление этих контактных зон и является основным источником силы трения. При относительном сдвиге осуществляется не только скольжение, но и упругое деформирование микроскопических выступов на контактирующих телах. При очень малых смещениях существенную главную роль играет упругое сопротивление и сила, которая должна подчиняться закону Гука. Все эти и другие особенности трения лишь дополняют вывод П. Пэнлеве о том, что законы Кулона применимы в определенных границах и при определенных условиях.

Прежде, чем кратко охарактеризовать основные направления исследований систем с трением рассмотрим пример П. Пэнлеве. Это не исключительный, а достаточно общий случай при больших значениях коэффициента трения. Детально пример проанализирован в работе [18].

Рассматриваются две материальные точки единичной массы, связанные невесомым стержнем MM_1 длины $r > 0$. Точка M скользит с трением по неподвижной горизонтальной прямой Ox, с которой не может сойти и имеет координату x, а другая точка M_1 движется без внешнего сопротивления в вертикальной плоскости Oxy под действием силы тяжести g (и реакции стержня). Ось Oy направлена вниз, θ – угол отклонения стержня от положительного направления оси Ox по часовой стрелке. Коэффициент трения $f > 0$ считается постоянным. Внешними силами, действующими на систему, являются полный вес $2g$, приложенный в центре тяжести G, и реакция R оси Ox, составляющие которой по осям Ox и Oy обозначим R_x и R_y. Уравнения движения и уравнение для нормальной реакции R_y имеют вид

$$\begin{aligned}
&2\ddot{x} - r\sin\theta\,\ddot{\theta} = r\dot{\theta}^2\cos\theta + R_x \\
&-\sin\theta\,\ddot{x} + r\ddot{\theta} = g\cos\theta \\
&r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta - 2g = R_y
\end{aligned} \tag{1}$$

Касательная реакция R_x при $\dot{x} \neq 0$ (сила трения скольжения в движении) по абсолютному значению равна $f\left|R_y\right|$ и имеет знак, противоположный скорости $\dot{x}$ точки M, где $f > 0$ – коэффициент трения (постоянная величина). Таким образом, согласно закону Кулона, в движении при $\dot{x} \neq 0$ имеем

$$R_y = -f\left|R_y\right| sgn\dot{x} \tag{2}$$

Пусть $0 < \theta_0 < \pi/2$. Выбирая знак скорости $\dot{x}_0$ и направление силы нормальной реакции R_y (т.е. освобождаясь от знака модуля $\left|R_y\right|$) и мы получаем систему линейных уравнений относительно реакции R_y и ускорений $\ddot{\theta}$ и $\ddot{x}$. Анализ этих уравнений показывает, что при определенных условиях на величину коэффициента трения f они не имеют решений при $\dot{x}_0 > 0$ (парадокс невозможности движения), а при $\dot{x} < 0$ удовлетворятся два возможных случая, не противоречащих закону трения (2) (парадокс неединственности).

Уже в ходе упомянутой выше дискуссии сформировалось направление исследования систем с трением, связанное с введением физических гипотез, дополняющих законы Кулона.

Идею учета упругости реальных тел высказал Л. Лекорню после начала дискуссии. Он считал, что сила трения возникает не сразу и коэффициент трения в течении очень короткого времени после начала движения возрастает от нуля до значения, соответствующего закону Кулона. Т.е. принималась в расчет тангенциальная упругость взаимодействующих тел. В наши дни подход Л. Лекорню получил развитие в работе [14].

Ф. Клейн и Ф.Л. Прандтль пытались устранить противоречия допустимостью бесконечных ускорений, т.е. – мгновенным изменением скорости в рамках гипотезы абсолютно твердого тела. Фактически это может означать очень быструю остановку тела, которая, в частности, выражает гипотезу мгновенного самоторможения. С развитием дискуссии Ф.Л. Прандль и Ф. Пфейфер предлагали также учитывать нормальную упругость тел в зоне контакта. Исследование было проведено на примере системы, состоящей из двух материальных точек, соединенных упругим стержнем и двигающихся по параллельным направляющим. Одна из точек испытывает трение. Этот пример был полностью исследован и парадоксов не возникло. Далее представляется возможным исследование поведения решения системы с ростом упругости (осуществить предельный переход). В этом направлении выполнены работы [4], [17]. Однако исследовать предельные уравнения в общем виде (не зная решения в аналитическом виде) представляет трудности, которые до сих пор не преодолены. Более того, в общем случае до сих пор строго не обосновано, что противоречия Пэнлеве отпадают с учетом упругих деформаций в зоне контакта.

Учет упругости приводит к необходимости рассматривать дифференциальные уравнения с малым параметром при старших производных. В работе [5] применена теория А.Н. Тихонова и в качестве малого параметра рассматривалась величина обратная коэффициенту упругости.

В работе [13] предлагается подход, основанный на замене закона Кулона на другой "физически реальный закон с предельной величиной силы трения, достигающийся при больших значениях нормальной силы на поверхности трения". Это обосновывается тем, что и в механике твердого и в механике деформируемого тела нормальные давления могут быть сколь угодно велики, в то время как касательные напряжения (силы трения) на поверхности контакта тел ограничены их прочностью.

В работе [9] исследовалась гипотеза тангенциального удара, дополняющая закон Кулона (мгновенное самоторможение).

В этом направлении имеются и другие исследования, связанные с изучением и объяснением парадоксов Пэнлеве на конкретных примерах систем с трением.

В работах [10]-[12] развивается метод отбраковки посторонних решений и выбор "истинного" из возможных движения рассмотрением систем с двусторонними удерживающими связями. Здесь авторы предложили принцип вариантности связей для систем абсолютно твердых тел с исчезающе малыми зазорами в удерживающих двусторонних связях. Варианты сменяют друг друга в процессе движения. Среди всех возможных нужно выбрать непротиворечивое и единственное по знакам нормальных реакций – "истинное движение". Парадокс неединственности движения здесь – следствие многовариантности контактов тел. Парадокс невозможности движения – отсутствие непротиворечивого варианта варианта связей. Эти идеи восходят к исследованиям Пэнлеве. Но они встречают значительные трудности при изучении трения при вращательном движении, т.к. там возникает квадратичная зависимость силы трения от нормальных реакций.

Дискуссия, возникшая более ста назад продолжается. В ней участвуют механики из различных школ и направлений. Но результатов по объяснению парадоксов Пэнлеве, которые можно было бы признать каноническими, не появилось. И даже неизвестно насколько различные исследования согласуются или дополняют друг друга. Сравнительный анализ практически невозможен.

Так, например, в работе [8] утверждается отсутствие предельной динамики, соответствующей переходу к абсолютно жесткому телу при стремлении параметров регуляризации к нулю. Делается вывод о необходимости отказаться в математических моделях систем с трением от гипотезы и проблемы выбора "истинных движений в парадоксальных ситуациях". Вместо этого нужно решать проблему "полноты модели", состоящей в необходимости в парадоксальной ситуации построения минимально достаточной корректной модели.

Внимание к парадоксам трения связано прежде всего со стремлением исследователей построить полную и непротиворечивую теорию систем с трением. Но объект исследований – один из самых сложных по своей природе и, возможно, точка здесь не будет поставлена никогда.

Вместе с тем исследования систем с трением в рамках аналитической динамики систем с трением не ограничиваются анализом противоречий. Имеются фундаментальны работы П. Аппеля [18], [16], А.И. Лурье [19], Н.Г. Четаева [20], В.В. Румянцева [21], Г.В. Пожарицкого [22]-[24], в которых принцип возможных перемещений Эйлера-Лагранжа, метод Лагранжа и принцип наименьшего принуждения Гаусса распространены на системы с трением. Отметим работы [25]-[29], в которых развивается теория систем с сухим трением (без учета возможности возникновения парадоксов Пэнлеве) . Отметим также интересные и познавательные очерки о трении [30], [31].

В заключение этого раздела укажем на еще одну особенность описания систем с трением: сила трения является разрывной функцией скорости и поэтому движение систем с кулоновым трением описывается дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями, хорошо разработанными к настоящему времени (см. [32]. Это обстоятельство добавляет существенные, но чисто математические трудности изучения уравнений движения систем с трением. Оно не связано с парадоксами Пэнлеве: парадоксы Пэнлеве выявляются в областях непрерывности правых частей уравнений движения. Попутно отметим, что дифференциальные уравнения с разрывной правой частью впервые возникли именно в динамике механических систем с кулоновым трением в трудах П. Пэнлеве и П. Аппеля.

1.2. Некоторые общие сведения о трении скольжения.

Приведем некоторые известные понятия и сведения о системах с трением скольжения (см. [18, стр. 107]), которыми мы будем руководствоваться при описании сил трения.

Вообразим два движущихся твердых тела A и B, тело A скользит по телу B, m – точка соприкосновения. N – нормальная реакция тела B на тело A, то есть сила, направленная перпендикулярно к соприкасающимся поверхностям в точке m, F – сила, приложенная к этой же точке m и расположенная в касательной плоскости к соприкасающимся поверхностям. Сила F называется силой трения скольжения. Она направлена в сторону, противоположную относительной скорости точки m по отношению к B, и равна по величине fN, где f – коэффициент трения, а N – абсолютная величина нормальной реакции. Таким образом, сила трения скольжения при движении определена, если известны значения f и N. Коэффициент трения f определяется экспериментально и зависит от природы соприкасающихся поверхностей. Отметим, что коэффициент трения в покое несколько меньше коэффициента трения в движении. Здесь, следуя [1], мы считаем, что они равны.

Что произойдет, если относительная скорость точки m по отношению к телу B обратится в нуль, то есть скольжение прекратится? В этом случае либо тело

A останется неподвижным по отношению к телу B, либо относительным движением будет качение и верчение и законы трения скольжения в движении не будут применимы. Пренебрегая трениями качения и верчения, сформулируем общий принцип определения силы трения скольжения при относительном покое, то есть в моменты прекращения скольжения.

Допустим, что относительная скорость точки B в начальный момент времени t_0 равна нулю. Нужно узнать, какой тип относительного движения тела A по телу A будет осуществляться в следующие моменты времени $t > t_0$. Чтобы ответить на этот вопрос, поступаем следующим образом: предполагаем, что при $t > t_0$ скорость точки m остается равной нулю. Тогда реакция тела A на тело B на основании принятых законов будет состоять из нормальной реакции N и касательной реакции F. Допускается, что в этом случае применимы законы трения в состоянии покоя, и поэтому должно выполняться неравенство $F < fN$. При этих условиях составляем уравнения задачи и вычисляем значения N и F. Если действительно найденное значение F окажется меньше, чем fN, то сделанное предположение будет правильным, а именно: относительная скорость точки m при $t > t_0$ равна нулю и F является силой трения скольжения в покое. Это утверждение будет справедливым до тех пор, пока величина F не сделается больше, чем fN. Начиная с этого момента будет происходить скольжение и уравнения нужно изменить. Если, наоборот, найденное значение F будет с самого начала больше, чем fN, то сделанное предположение (о том, что скорость точки m при $t > t_0$ равна нулю) неверно и движение скольжения невозможно. С самого начала нужно написать уравнения движения, применяя законы трения скольжения при движении.

В том случае, когда как до момента остановки t_0, так и после него происходит скольжение, в соответствии с законом трения в движении при изменении направления движения изменит знак на противоположный, то есть произойдет скачкообразное изменение силы трения, о чем уже упоминалось.

Приведенные здесь рассуждения являются весьма схематичными и общими. В конкретных ситуациях для определения силы трения недостаточно только выводить уравнения движения. Если активные силы, действующие на систему, известны, то реакции связей необходимо вычислять и анализировать. В том случае, когда имеется множество точек соприкосновения трущихся тел, все сказанное следует применять к каждой такой точке. Метод определения реакций связей с трением приводится в следующем разделе

1.3. Общие уравнения движения систем с одностепенными кинематическими парами с трением.

Наши исследования проводятся в рамках классической механики систем твердых тел. Рассматриваются уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение систем с кулоновым трением скольжения, с идеальными, нестационарными, удерживающими связями. Как уже говорилось выше, согласно законам Кулона обобщенные силы трения скольжения выражаются через коэффициенты трения и модули нормальных реакций в точках соприкосновения трущихся тел. Последние записываются через обобщенные реакции связей с трением, которые заранее неизвестны. В данной работе предлагается подход, основанный на рассмотрении уравнений Лагранжа с множителями и избыточными обобщенными координатами при мысленном освобождении исходной системы от связей, вызывающих искомые реакции (см. [19]). В результате получаем "расширенную" систему уравнений, в которую в качестве неизвестных функций, наряду с решением системы, входят также обобщенные реакции связей с трением. Так как модули нормальных реакций являются нелинейными функциями, то обобщенные реакции связей задаются такими уравнениями неявно. Разрешение таких "расширенных" относительно обобщенных ускорений систем не всегда возможно и не всегда однозначно. В этом проявляются парадоксы Пэнлеве и их исследование приобретает чисто математический характер.

Указанный подход опишем детально. Пусть дана механическая система с k степенями свободы, в которой кулоновы силы трения действуют на $k_* \le k$ кинематических пар, описываемых обобщенными координатами $q^1, \dots, q^{k_*}$. Освобождая систему от связей с трением, введем $k^* \ge k_*$ дополнительных обобщенных координат $q_*^1, \dots, q_*^{k^*}$, которые выберем так, чтобы уравнения "разорванных" связей имели наиболее простой вид:

$$q_*^j = 0, \quad j = 1, \dots, k^* \tag{3}$$

Оставшиеся связи без трения сохраняются и предполагаются идеальными, голономными, и, вообще говоря, нестационарными.

Вводятся обозначения: $q = \left(q^1, \dots, q^k\right)$, $q_* = \left(q_*^1, \dots, q_*^{k^*}\right)$ – векторы обобщенных координат исходной системы и дополнительных обобщенных координат; $N' = \left(N_1', \dots, N_{k^*}'\right)$ – вектор обобщенных сил реакций "разорванных" связей. Точка и две точки сверху обобщенных координат, как обычно, означает первую и вторую производные по времени.

Кинетическая энергия T_{a^*} и обобщенные силы Q_i^* составляются для свободной от связей системы для объединенного вектора обобщенных координат $q_\sigma = \left(q_\sigma^1, \dots, q_\sigma^{k+k^*}\right)$ (т.е. $q_\sigma^i = q^i$ $(i = 1, \dots, k)$, $q_\sigma^i = q_*^{i-k}$ $(i = k+1, \dots, k+k^*)$). По предположению T_{a^*} представляет собой сумму положительно определенной формы обобщенных скоростей, линейной формы обобщенных скоростей $\dot{q}_\sigma^i$ и функции $T_0^* = T_0^*\left(t, q_\sigma\right)$:

$$T_{a^*} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k+k^*}\sum_{j=1}^{k+k^*} a_{ij}^*\left(t, q_\sigma\right)\dot{q}_\sigma^i \dot{q}_\sigma^j + \sum_{i=1}^{k+k^*} a_i^*\left(t, q_\sigma\right)\dot{q}_\sigma^i + T_0^*\left(t, q_\sigma\right).$$

Функции $a_{ij}^*(t,\, q_\sigma)$, $a_i^*(t,\, q_\sigma)$, $T_0^*(t,\, q_\sigma)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов.

Уравнения движения "расширенной" системы в форме Лагранжа запишутся в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{a^*}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T_{a^*}}{\partial q^i} = Q_i^*, \quad i = 1,\, \ldots,\, k \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{a^*}}{\partial \dot{q}_*^j} - \frac{\partial T_{a^*}}{\partial q_*^j} = Q_{k+j}^* + N_j', \quad j = 1,\, \ldots,\, k^* \tag{5}$$

Обобщенные силы Q_i^* имеют вид $Q_i^* = Q_i^{A^*}(t,\, q_\sigma,\, \dot{q}_\sigma) + Q_i^{T^*}(t,\, q_\sigma,\, \dot{q}_\sigma,\, N')$, $i = 1,\, \ldots,\, k + k^*$, где $Q_i^{A^*}$ – обобщенные активные силы, действующие на систему (потенциальные силы, силы сопротивления демпферов, среды, возмущающие и управляющие силы любой физической природы, силы радиальной коррекции); $Q_i^{T^*}(t,\, q_\sigma,\, \dot{q}_\sigma,\, N')$ – обобщенные силы трения. Предполагается, что работа сил трения на виртуальных перемещениях по дополнительным обобщенным координатам равна нулю.

Рассматривая уравнения (4), (5) совместно с уравнениями связей (3) и подставляя в них (в силу уравнений связей) значения $q_*^j = 0$, $\dot{q}_*^j = 0$, $\ddot{q}_*^j = 0$, $j = 1,\, \ldots,\, k^*$, получим $k + k^*$ уравнений для определения обобщенных координат $q^1,\, \ldots,\, q^k$ и обобщенных реакций связей с трением $N_1',\, \ldots,\, N_{k^*}'$ (в области определения сил трения). В развернутом виде этими уравнениями будут

$$\sum_{s=1}^{k} a_{i,s}(t,\, q)\ddot{q}^s = g_i(t,\, q,\, \dot{q}) + Q_i^A(t,\, q,\, \dot{q}) + Q_i^T(t,\, q,\, \dot{q},\, N'), \quad i = 1,\, \ldots,\, k \tag{6}$$

$$\sum_{s=1}^{k} a_{k+j,s}(t,\, q)\ddot{q}^s = g_{k+j}(t,\, q,\, \dot{q}) + Q_{k+j}^A(t,\, q,\, \dot{q}) + N_j', \quad j = 1,\, \ldots,\, k^* \tag{7}$$

где $a_{l,s}(t,\, q) = a_{l,s}^*(t,\, q_\sigma)\big|_{q_*=0,\dot{q}_*=0}$, $(l = 1,\, \ldots,\, k+k^*,\; s = 1,\, \ldots,\, k)$ – коэффициенты квадратичной формы обобщенных скоростей $\dot{q}_\sigma^l$ из кинетической энергии T_{a^*} при условии $q_* = 0$; $Q_l^A(t,\, q,\, \dot{q}) = Q^{A^*}(t,\, q_\sigma,\, \dot{q}_\sigma)\big|_{q_*=0,\, \dot{q}_*=0}$, $(l = 1,\, \ldots,\, k+k^*)$ – обобщенные активные силы; $g_l(t,\, q,\, \dot{q}) = g_l^*(t,\, q_\sigma,\, \dot{q}_\sigma)\big|_{q_*=0,\, \dot{q}_*=0}$, $(l = 1,\, \ldots,\, k+k^*)$ – непрерывные функции, характеризующие обобщенные гирпоскопические силы, и некоторые другие члены при условии $q_* = 0$, $\dot{q}_* = 0$.

Система (6), (7) представляет собой специфическую систему дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной правой частью, неизвестными функциями в которой является обобщенные реакции связей $N_i'(t)$ и движение системы $q^i(t)$. Ее можно было бы назвать алгебро-дифференциальной с той лишь разницей, что функции $N_i'(t)$ входят в нее без своих производных.

Выразим из группы уравнений (7)реакции связей через обобщенные ускорения и подставим в уравнения (6). Тогда получим уравнения движения в векторной форме записи в неявной виде:

$$A(t, q)\ddot{q} = g(t, q, \dot{q}) + Q^A(t, q, \dot{q}) + Q^T(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \qquad (8)$$

В этой системе силы трения зависят от ускорений. Может возникнуть вопрос: не выходит ли это за рамки Ньютоновой механики, где зависимость сил от ускорений не допускается. В связи с этим заметим, что уравнения (8) – всего лишь форма записи исходных "расширенных" уравнений движения в неявном виде. Отметим также, что формы записи уравнений движения систем с трением также являются предметом исследований.

1.4. Обобщенные силы трения скольжения.

Пусть связи и обобщенные координаты $q^1, \ldots, q^k$ таковы, каждая из обобщенных сил трения Q_i^T зависит явно только от соответствующей (одной) обобщенной скорости $\dot{q}^i$ и нормальных реакций N_i' . Последние выражаются из уравнений (7), как функции времени, обобщенные состояний, скоростей и ускорений. Согласно законам Кулона, при движении с обобщенными скоростями $\dot{q}^s(t) \neq 0$, $(s = 1, \ldots, k_*,\ 1 \le k_* \le k)$, обобщенные силы трения скольжения Q_i^T выражаются формулами $Q_s^{T1} = -f_s \left| N_s \right| sgn\, \dot{q}^s$, $(s = 1, \ldots, k_*)$ через коэффициенты трения (в движении) f_s и модули нормальных реакций. Модули нормальных реакций выражаются равенствами: $\left| N_s \right| = \left| N_s' \right|$ при скольжении со скоростью $\dot{q}^s$ по поверхности $q_*^s = 0$, $s = 1, \ldots, k'$, $0 \le k' \le k_*$; $\left| N_s \right| = \sqrt{N_j'^2 + N_{j'}'^2}$, если N_s получается от сложения взаимно ортогональных реакций гладких связей $q_*^j = 0$, $q_*^{j'} = 0$ с модулями $\left| N_j' \right|$, $\left| N_{j'}' \right|$, $s = k' + 1, \ldots, k_*$, $i,\ j = k' + 1, \ldots, k^*$ при вращении тела вокруг оси $q^j = 0$, $q^{j'} = 0$ или при скольжении точки по пространственной кривой.

Заметим, что функции $\left| N_s \right|$ непрерывны по $\ddot{q}$, а при $\left| N_s \right| \neq 0$ непрерывно-дифференцируемы по $\ddot{q}$.

Итак, для обобщенных сил трения скольжения в движении имеем

$$Q_s^{T1} = -f_s\left(t, q^s, \dot{q}^s\right)\left|N_s\left(t, q, \dot{q}, \ddot{q}\right)\right| sgn\dot{q}^s \text{ если } \dot{q}^s \neq 0,\ \ s = 1, \ldots, k_* \qquad (9)$$

Пусть теперь скорость скольжения трущегося тела в некоторый момент времени равна нулю. В соответствии с правилами классической механики считаем, что коэффициенты трения $f_s^0\left(t,\, q^s\right)$ при относительном покое равны коэффициентам трения движения, т.е. $f_s^0\left(t,\, q^s\right) = f_s\left(t,\, q^s,\, 0\right)$, $s = 1,\, \ldots,\, k_*$.

Далее поступаем по схеме, изложенной в разделе 1.3 для определения сил трения при относительном покое. Если $\dot{q}^s\left(t\right) = 0$ для некоторого индекса $1 \le s \le k_*$, то полагаем $\ddot{q}^s = 0$ и вычисляем обобщенную силу трения скольжения при относительном покое $Q_s^{T0}\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) @ \sum\limits_{j=1,\, j\ne s}^{k} a_{sj}\left(t,q\right)\ddot{q}^j - \left[g_s\left(t,\, q,\, \dot{q}\right) - Q_s^A\left(t,\, q,\, \dot{q}\right)\right]_{\dot{q}^s=0}$.

Если выполняется неравенство

$$\left| Q_s^{T0}\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) \right| \le f_s^0\left(t, q^s\right) \left| N_s\left(t,\, q,\, \dot{q}, \ddot{q}\right) \right|_{\dot{q}^s=\ddot{q}^s=0} \qquad (10)$$

то действительно будет $\ddot{q}^s = 0$ и $Q_s^T\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) = Q_s^{T0}\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right)$.

Если же неравенство (10) не выполняется, то сделанное предположение (о том, что $\ddot{q}^s = 0$) отбрасывается и считается

$$Q_s^T\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) = f_s\left(t,\, q^s,\, 0\right) \left| N_s\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) \right| sgn\, Q_s^{T0}\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) \qquad (11)$$

Тогда в действительном движении системы будет выполняться неравенство $\ddot{q}^s \ne 0$, так как при $\ddot{q}^s = 0$ получили бы $\left| Q_s^{T0} \right| = f_s^0 \left| N_s \right|_{\dot{q}^s=\ddot{q}^s=0}$

В общем случае для обобщенной силы трения скольжения получается выражение

$$Q_s^T\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) = \begin{cases} -f\left(t,\, q^s,\, \dot{q}^s\right) \left| N_s\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) \right| sgn\dot{q}^s, \text{ если } \dot{q}^s \ne 0, \\ f_s\left(t, q^s, 0\right) \left| N_s\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) \right| sgn Q_s^{T0}\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right), \text{ если } \dot{q}^s = 0, \\ \left| Q_s^{T0}\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) \right| > f_s^0\left(t,\, q^s\right) \left| N_s\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) \right|_{\ddot{q}^s=0}, \\ Q_s^{T0}\left(t, q, \dot{q}, \ddot{q}\right), \text{ если } \dot{q}^s = 0, \\ \left| Q_s^{T0}\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) \right| \le f_s^0\left(t, q^s\right) \left| N_s\left(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right) \right|_{\ddot{q}^s=0} \end{cases} \qquad (12)$$

Итак, в данной работе исследуется уравнение (8) с силами трения скольжения, определяемыми формулой (12).

Возникает две задачи:

1) Об однозначной разрешимости уравнений движения (8) относительно обобщенных ускорений и приведении их к нормальной форме

$$\ddot{q} = G\left(t,\, q,\, \dot{q}\right) \qquad (13)$$

2) Развитие общей теории и методов исследования уравнения (13).

В данной работе развивается теория правосторонних решений уравнений (8). Под правосторонним решением, определенным на некотором промежутке $\left[t_0,\, t_1\right)$, понимается непрерывная, дифференцируемая справа векторная функция $\left(q(t),\, \dot{q}(t)\right)$, удовлетворяющая

$$D^{+}q(t)=\dot{q}(t),\quad D^{+}\dot{q}(t)=G\left(t,\, q(t),\, \dot{q}(t)\right)$$
$$q(t_0)=q_0,\quad \dot{q}(t_0)=\dot{q}_0 \tag{14}$$

Отметим, что понятие правостороннего решения в наибольшей степени соответствует смыслу и содержательности исследуемой задачи. Классических решений здесь может не существовать, так как функция G разрывна. В то же время правосторонняя производная скорости в механике имеет смысл обобщенного ускорения.

Трудность исследования уравнения состоит в том, что функция G не только разрывна, но неявно задана. Это осложняет применение хорошо разработанных методов теории разрывных систем, таких как переход к дифференциальным включениям. Поэтому для исследования поставленных выше задач в рамках теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью был выделен и изучен специальный класс разрывных систем. Этому посвящена следующая часть 2 данной работы.

2 ПРАВОСТОРОННИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙС РАЗРИВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

2.1. Существование и общие свойства решений.

Будет исследоваться дифференциальное уравнение в векторной форме записи

$$\dot{x}=f\left(t,\, x\right) \tag{15}$$

с разрывной, однозначно определенной в каждой точке $\left(t,\, x\right)$ функцией $f:\Omega\to R^{n+1}$, где $\Omega\subset R^{n+1}$ – некоторая область.

Анализ уравнений (8) показал, что имеется некоторый набор свойств функции G, в рамках которых для уравнения (13) можно развивать достаточно полную математическую теорию. Обобщение этих свойств, взятых в качестве предположений, выявляет, по сути дела, новый класс дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, для которого возможно решить основной круг вопросов общей теории (существование, продолжимость решений, зависимость их от начальных условий и др.) и развивать методы качественной теории. Такая обобщенная постановка задачи позволяет, с одной стороны, показать, какие свойства исследуемых уравнений движения систем с трением являются определяющими с точки зрения изучения их математическими методами, а с другой – непосредственно применять результаты и методы исследований к системам иной природы.

Под правосторонним решением задачи Коши для уравнения (15) на промежутке $\left[t_0,\, t_1\right)$ с начальным условием $\left(t_0,\, x_0\right)\in\Omega$ понимается абсолютно непрерывная, дифференцируемая справа функция $x(t)$, удовлетворяющая $D^{+}x(t)=f\left(t,\, x(t)\right)$, $x(t_0)=x_0$ для всех $t\in\left[t_0,\, t_1\right)$, где $D^{+}x(t)$ – правая производная функции $x(t)$. Всюду в дальнейшем решения уравнения (15) понимаются как правосторонние.

Для каждой точки $(t,\, x)\in\Omega$ через $\Gamma=\Gamma(t,\, x)\subset R^n$ обозначается непустой замкнутый конус (т.е. Γ – замкнутое множество и для любого числа $\alpha\geq 0$ из условия $y\in\Gamma$ вытекает $\alpha\, y\in\Gamma$). Случай $\Gamma=R^n$ или $\Gamma=\{0\}$ не исключается.

Положим

$$S_\delta(t,\, x) @ \{(t',x') :\, t\leq t' < t+\delta,\ \|x-x'\|<\delta\},$$

$$\Omega^0(t,\, x) @ \{(t',\, x') : x'\in x+\Gamma(t,\, x)\},$$

$$\Omega^0_\delta(t,\, x) @ \Omega^0(t,\, x)\bigcap S_\delta(t,\, x).$$

Для уравнения (15) предполагаются выполненными следующие

Основные условия. *Для каждой точки* $(t,\, x)\in\Omega$ *определены множество* $\Gamma(t,\, x)$ *и вещественнозначная, непрерывная функция* $V_{(t,x)}(t',\, x')$, *липшицевая по* x' *равномерно относительно* t' *в некоторой окрестности* $S_\delta(t,\, x)$, *для которых (вместе с функцией* f *) выполняется:*

1. *Функция* f *локально ограничена;*
2. *Функция* f *непрерывна в каждой точке* $(t,\, x)$ *вдоль множества* $\Gamma(t,\, x)$ *справа относительно* t', *т.е. для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta=\delta(\varepsilon,\, t,\, x)>0$ *такое, что* $\|f(t,\, x)-f(t',\, x')\|<\varepsilon$ *для всех* $(t',\, x')\in\Omega^0_\delta(t,\, x)$*;*
3. $f(t,\, x)\in\Gamma(t,\, x)$ *для всех* $(t,\, x)\in\Omega$*;*
4. *Для всех* $(t',\, x')\in S_\delta(t,\, x)$ *выполняются условия:*

$$V_{(t,x)}(t',x')\geq 0 \text{ и } V_{(t,x)}(t',x')=0 \Leftrightarrow (t',x')\in\Omega^0_\delta(t,\, x),.$$

и если $\Gamma(t,\, x)\neq R^n$, *то существуют числа* $\alpha_0=\alpha_0(t,\, x)>0$ $\delta=\delta(t,\, x)>0$ *такие, что* $D^{*+}V_{(t,x)}(t',\, x')<-\alpha$ *для всех* $(t',\, x')\in S_\delta(t,\, x)\setminus\Omega^0(t,x)$, *где*

$$D^{*+}V_{(t,x)}(t',\, x') @ \overline{\lim_{h\to+0}}\frac{V_{(t,x)}(t'+h,\, x'+hf(t',\, x'))-V_{(t,x)}(t',\, x')}{h}.$$

Отметим, что в каждой точке $(t, x) \in \Omega$ такой, что $\Gamma(t, x) = R^n$ для выполнения условий 1-4 достаточно непрерывности функции f в этой точке. Отметим также, что функция $V_{(t,x)}(\cdot,\cdot)$ (при фиксированных (t, x)), являясь, по своей сути, функцией Ляпунова, вначале служит для доказательства существования решений и уже в дальнейшем выражение $D^{*+}V_{(t,x)}(t', x')$ рассматривается как правая верхняя производная функции $(t', x') \to V_{(t,x)}(t', x')$ вдоль решения уравнения (15) и используется для изучения устойчивости. Функция $V_{(t,x)}$ с заданными свойствами существует и построена ниже для исследуемых систем с трением.

Сформулируем основные теоремы о существовании и свойствах решений уравнения (15), предполагая выполненными основные условия.

Т е о р е м а 1.1.1. *Для любого начального состояния* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *существует локальное правостороннее решение уравнения (*15*).*

О п р е д е л е н и е . *Правостороннее решение* $x(t)$ *уравнения (*15*) называется* R *– правосторонним, если функция* $D^+x(t)$ *(правая производная решения* $x(t)$*) непрерывна справа в каждой точке* t *из области определения* $x(t)$.

Т е о р е м а 1.1.2. *Любое правостороннее решение уравнения (*15*) является* R *– правосторонним.*

Понятия продолжения решения, непродолжимого решения, правого максимального промежутка существования используются в обычном смысле.

Т е о р е м а 1.1.3. *Любое решение уравнения (*15*) начальными условиями* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования* $[t_0, \omega)$. *Любое непродолжимое вправо решение уравнения (*15*) стремится к границе множества* Ω *(т.е. покидает любое компактное подмножество из* Ω*).*

Пусть Λ – некоторое метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$ и функция f зависит также от переменной $\lambda \in \Lambda$, рассматриваемой как параметр. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda) \tag{16}$$

с функцией $f : \Omega \times \Lambda \to R^n$ и начальными данными (t_0, x_0) при условии

$\lambda = \lambda_0$. Будем предполагать, что при любом фиксированном $\lambda \in \Lambda$ для функции $f(\cdot, \cdot, \lambda)$ выполняются сформулированные выше основные условия 1-4. Относительно зависимости функции f от параметра λ предположим следующее: для каждого $\lambda_0 \in \Lambda$, любого компактного множества $W \subset \Omega$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\lambda_0, \varepsilon, W) > 0$ такое, что выполняется неравенство $\| f(t, x, \lambda) - f(t, x, \lambda_0) \| < \varepsilon$ при всех $(t, x) \in W$ и значениях $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющих $d(\lambda, \lambda_0) < \delta$.

Свойство правой единственности уравнения (16) означает, с возрастанием t при фиксированном λ его решения могут сливаться, но не могут разветвляться.

Т е о р е м а 1.2.1. *Пусть уравнение (*16*) обладает правой единственностью,* $x(t)$ *– решение задачи (*16*) с начальными данными* (t_0, x_0), *значением* $\lambda = \lambda_0$ *и правым максимальным промежутком существования* $[t_0, \omega)$. *Тогда для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $t^* \in (t_0, \omega)$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что любое правостороннее решение* $x'(t)$ *задачи (*16*) с начальными состояниями* (t_0', x_0') *и значениями* λ', *удовлетворяющими условиям* $\| x_0' - x_0 \| < \delta$, $t_0 - \delta < t_0' \le t_0$, $d(\lambda', \lambda_0) < \delta$, *может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования* $[t_0', \omega')$, $\omega' > t^*$, *и (для продолжения* $x'(t)$*) выполняется неравенство* $\| x'(t) - x(t) \| < \varepsilon$ *, при всех* $t \in [t_0, t^*]$.

Рассмотрим некоторые свойства интегральной воронки уравнения (16) без предположения о правой единственности. Пусть множество $\Omega(t_0) @ \{x : (t_0, x) \in \Omega\}$ не пусто и $A \subset \Omega(t_0) \times \Lambda$. Через $H_f(A)$ обозначается множество всех непродолжимых решений $x(t)$ уравнения (16) с начальными данными $(x(t_0), \lambda_0) \in A$. В предположении, что все решения $x(\cdot) \in H_f(A)$ определены на промежутке $[t_0, a)$ и $t^* < a$ через $H_f(A)[t_0, t^*]$ обозначается множество всех сужений таких решений на отрезок $[t_0, t^*]$. Множество $\Phi_f(A)[t_0, t^*] @ \{(t, x(t)) : x(\cdot) \in H_f(A),\ t_0 \le t \le t^*\}$ называется отрезком интегральной воронки уравнения (16), лежащим в полосе $t_0 \le t \le t^*$.

Т е о р е м а 1.3.1. *Пусть множество* $A \subset \Omega(t_0) \times \Lambda$ *компактно. Тогда множество решений* $H_f(A)[t_0, t^*]$ *является компактным в пространстве* $C([t_0, t^*])$ *непрерывных функций, определенных на отрезке* $[t_0, t^*]$ *с топологией равномерной сходимости. Отрезок интегральной воронки* $\Phi_f(A)[t_0, t^*]$ *является компактным множеством пространства* R^{n+1}.

С л е д с т в и е 1.3.1. *Пусть* $(t_0, x_0) \in \Omega$, $\lambda_0 \in \Lambda$ *фиксированы и все решения уравнения (*16*) с начальными условиями* (t_0, x_0) *при* $\lambda = \lambda_0$ *определены на промежутке* $[t_0, a)$. *Тогда для любого* $t^* \in (t_0, a)$ *и некоторого достаточно малого* $\delta > 0$ *для всех* x_0', λ', *удовлетворяющих условию*

$$(t_0, x_0') \in \Omega, \ \| x_0' - x_0 \| < \delta, \ \ d(\lambda', \lambda_0) < \delta, \tag{17}$$

множества $H_f(x_0', \lambda')[t_0, t^*]$ *и* $\Phi_f(x_0', \lambda')[t_0, t^*]$ *не пусты, компактны (в соответствующих пространствах), а многозначные отображения*

$$(x_0', \lambda') \to H_f(x_0', \lambda')[t_0, t^*] \tag{18}$$

и

$$(x_0', \lambda') \to \Phi_f(x_0', \lambda')[t_0, t^*] \tag{19}$$

полунепрерывны сверху в точке (x_0, λ_0).

Отметим, что для компактнозначного многозначного отображения (18) полунепрерывность сверху означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех значений (x_0', λ'), удовлетворяющих условию (17), множество $H_f(x_0', \lambda')[t_0, t^*]$ принадлежит ε – окрестности (в пространстве $C[t_0, t^*]$) множества $H_f(x_0, \lambda_0)[t_0, t^*]$. Аналогичное утверждение справедливо и для многозначного отображения (19).

2.2. Принцип инвариантности и притяжение для автономных систем.

Рассматривается автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x) \tag{20}$$

с функцией $f : \Omega \to R^n$, определенной в некоторой области $\Omega \subset R^n$. Как обычно полагаем $t_0 = 0$. В рамках данного раздела для уравнения (20) полагаем выполненными следующие свойства:

1°. *Для любого начального состояния* $x_0 \in \Omega$ *существует локальное решение;*

2°. *Функция* $f(x)$ *является локально ограниченной;*

3°. *Предел* $x(t)$ *любой равномерно на* $[0, t_1)$ *сходящейся последовательности решений уравнения (20) является решением уравнения (20) при условии, что* $x(t) \in \Omega$ *при всех* $t \in [0, t_1)$.

Они следуют из основных условий раздела 2.1.

Для решения $x(t)$ уравнения (20), определенного на правом максимальном промежутке существования $[0, \omega)$, через $\Lambda^+(x)$ обозначается ω – предельное множество. Любое решение уравнения (20) может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[0, \omega)$. При этом, если $\Lambda^+(x) \bigcap \Omega \neq \emptyset$, то $\omega = +\infty$. Множество положений равновесия уравнения (20) является замкнутым относительно множества Ω (т.е., если Ω рассматривать, как подпространство с метрикой, индуцированной из R^n). Правосторонняя единственность решений не предполагается.

О п р е д е л е н и е . *Множество* $F \subset \Omega$ *называется полуинвариантным, если для каждого* $x_0 \in F$ *существует хотя бы одно непродолжимое решение* $x(t)$ *уравнения (20) с начальным условием* $x(0) = x_0$, *удовлетворяющее* $x(t) \in F$ *для всех* $t \in [0, \omega)$.

Т е о р е м а 2 .2.1 *Любое* ω *– предельное множество уравнения (20) полуинвариапнтно.*

Ниже для уравнения (20) формулируется принцип инвариантности Ла-Салля и приводятся теоремы о притяжении с использованием набора функций Ляпунова. Одна (основная) функция Ляпунова обеспечивает притяжение к множеству, на котором обращается в нуль ее производная. Вспомогательные функции Ляпунова обеспечивают притяжение к некоторому множеству, которым может быть и множество неизолированных положений равновесия.

Через $w(x)$ обозначается произвольная функция с неотрицательными значениями, определенная в области Ω. Положим $E(w=0) @ \{x \in \Omega : w(x) = 0\}$.

Т е о р е м а 2 .2.2. *Пусть для уравнения (20) и некоторого множества* $M \subset \Omega$ *существует конечный набор локально липшицевых функций* $V_i(x)$,

$i=0,1,\ldots,N$, *таких, что* $D^{*+}V_0(x)\le -w(x)$ *для всех* $x\in\Omega$ *и для любого* $x\in E(w=0)\setminus\overline{M}$ *существует* $i\in(1,\ldots,N)$ *такое, что* $V_i(x)=0$, $D^{*+}V_i(x)\ne 0$.

Тогда для любого непродолжимого решения $x(t)$ *уравнения (20) выполняется условие* $\Lambda^+(x)\cap\Omega\subset\overline{M}$.

Будем говорить, что решение $x(t)$ уравнения (20) стремится к множеству $F\subset\overline{\Omega}$, если $d(x(t),F)\to 0$ при $t\to\omega$, $t<\omega$, где d – расстояние от точки до множества. Решение $x(t)$ слабо стремится к множеству F, если существует последовательность точек $t_k\to\omega$, $t_k<\omega$, такая, что $d(x(t_k),F)\to 0$. Через $\partial\Omega$ обозначается граница множества Ω.

С л е д с т в и е 2.2.1. *Пусть выполняются условия теоремы 2.2.2. Тогда* $\Lambda^+(x)\subset\overline{M}\cup\partial\Omega$ *и для решений* $x(t)$ *уравнения (20) справедливы утверждения:*

1) либо $\|x(t)\|\to+\infty$, *либо* $x(t)$ *слабо стремится к множеству* $M\cup\partial\Omega$ *при* $t\to\omega$;

2) либо $x(t)$ *неограничено, либо* $x(t)$ *стремится к множеству* $M\cup\partial\Omega$ *при* $t\to\omega$;

3) если $M\cup\partial\Omega=\emptyset$, *то* $\|x(t)\|\to+\infty$ *при* $t\to\omega$.

С л е д с т в и е 2.2.2. *Пусть выполняются условия теоремы 2.2.2. Тогда:*

1) Если $\overline{M}\cap\partial\Omega=\emptyset$, *то любое ограниченное решение* $x(t)$ *уравнения (20) стремится либо к множеству* M, *либо к множеству* $\partial\Omega$. *В частности, если* $\Omega=R^n$ *и* M *– множество положений равновесия системы (20), то она дихотомична;*

2) Если множество $M\subset\Omega$ *компактно, то либо* $\|x(t)\|\to+\infty$, *либо* $x(t)$ *ограничено и стремится к* M, *либо* $x(t)$ *покидает любое компактное множество из области* Ω *при* $t\to\omega$.

Для каждого $x\in\overline{\Omega}$ обозначается $\underline{w}(x)=\begin{cases} w(x), & x\in\Omega,\\ \underline{\lim}_{x'\to x,\, x'\in\Omega} w(x'), & x\in\partial\Omega.\end{cases}$

Будем говорить, что функция $V(x)$ непрерывна вплоть до границы, если для каждой точки $x\in\partial\Omega$ существует конечный предел $\lim_{x'\to x,\, x'\in\Omega}V(x')$. Функцию

f назовем локально ограниченной на границе, если для любой точки $x \in \partial\Omega$ функция f ограничена на пересечении некоторой окрестности x с множеством Ω.

Т е о р е м а 2 .2.3. *Пусть $V_0(x)$ – непрерывная вплоть до границы локально липшицева функция, такая, что*

$$D^{*+}V_0(x) \le -w(x) \tag{21}$$

для всех $x \in \Omega$ и f – локально ограниченная на границе функция.

Тогда $\Lambda^+(x) \subset E(\underline{w}=0)$ для любого решения уравнения (20), определенного при всех $t \ge 0$.

Т е о р е м а 2 .2.4. *Пусть $M \subset \Omega$ – некоторое множество, $V_0(x)$ – локально липшицевая, непрерывная вплоть до границы функция, для которой выполняется неравенство (21). Предположим, что функция f локально ограничена на границе и в некоторой окрестности множества $\overline{\Omega}$ определены непрерывно-дифференцируемые функции $V_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, со свойством: для любого $x \in E(\underline{w}=0) \setminus \overline{M}$ существует функция V_i такая, что $V_i(x) = 0$ и выполняется*

$$D^+V_i(x) \ne 0, \text{ если } x \in \left(E(w=0) \cap \Omega\right) \setminus \overline{M};$$

$$\left\langle \nabla V_i(x) \cdot \overline{f}(x) \right\rangle > 0 \text{ для всех } \overline{f}(x), \text{ если } x \in \left(E(\underline{w}=0) \cap \Omega\right) \setminus \overline{M},$$

где $\overline{f}(x)$ – предельные значения функции f в точке x.

Тогда для любого решения $x(t)$ уравнения (20), определенного для всех $t \ge 0$, выполняется включение $\Lambda^+(x) \subset \overline{M}$.

С л е д с т в и е 2 .2.3. *Пусть выполняются условия теоремы 2.3.2. Тогда для решений уравнения (20), определенных для всех $t \ge 0$, справедливы утверждения:*

1) либо $\|x(t)\| \to +\infty$, либо $x(t)$ слабо стремится к множеству M при $t \to +\infty$;

2) либо решение $x(t)$ не ограничено, либо $x(t)$ стремится к множеству M при $t \to +\infty$;

3) если $M = \emptyset$, то $\|x(t)\| \to +\infty$ при $t \to +\infty$;

4) если множество M ограничено, то либо $\|x(t)\| \to +\infty$, либо $x(t)$

ограничено и стремится к M *при* $t \to +\infty$.

2.3. Устойчивость.

Применение метода Ляпунова к исследованию устойчивости уравнений движения механических систем в неявной форме (8) связано с изучением знакоопределенности производной функции Ляпунова, которая задана неявно, поскольку содержит обобщенные ускорения. Доказанные здесь теоремы об устойчивости позволяют ослабить возникающие трудности и дают более полную картину поведения траекторий вблизи множества неизолированных положений равновесия для систем с трением.

Будем предполагать, что для каждой точки $x \in \Omega$ конус $\Gamma(x)$, фигурирующий в основных условиях 1-4 раздела 2.1 обладает свойством: $x + \Gamma(x) = \Gamma(x)$. Указанное свойство выполняется, если $\Gamma(x)$ имеет специальную структуру, а именно: $\Gamma(x)$ представляет собой некоторое непустое множество или совпадающее со всем пространством R^n, или образованное пересечением полупространств и подпространств вида

$$L_s^- @\left\{x' \in R^n : x_s' \le 0\right\}, \quad L_s^+ @\left\{x' \in R^n : x_s' \ge 0\right\}, \quad L_s^0 @\left\{x' \in R^n : x_s' = 0\right\},$$

где индексы s берутся из множества $N(x) @\left\{s \in (1, \ldots, n) : x_s = 0\right\}$. Именно такие множества возникают при исследовании систем с трением (8).

Положим $S_\delta(x) @\left\{x' \in \Omega : \| x - x' \| < \delta\right\}$, $\Omega_\delta(x) @ S_\delta(x) \cap \Gamma(x)$ и сформулируем точно условия, при которых будет изучаться уравнение (20).

Пусть для каждой точки $x \in \Omega$ определено множество $\Gamma(x)$ (с указанным выше свойством) и существует локально липшицевая функция $V_x : \Omega \to R^+$, удовлетворяющие вместе с функцией f следующим условиям:

1. Функция f является локально ограниченной;

2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ такое, что для всех $x' \in \Omega_\delta(x)$ выполняется $\| f(x) - f(x') \| < \varepsilon$;

3. $f(x) \in \Gamma(x)$ для всех $x \in \Omega$;

4. Для каждой фиксированной точки $x \in \Omega$ выполняется соотношение

$$\left(\forall x' \in \Omega,\ V_x(x') \ge 0\right) \wedge \left(V_x(x') = 0 \Leftrightarrow x' \in \Gamma(x)\right) \tag{22}$$

и, если $\Gamma(x) \ne R^n$, то существуют такие числа $\alpha = \alpha(x) > 0$ и $\delta = \delta(x) > 0$, что

$$D^{*+} V_x(x') < -\alpha \tag{23}$$

для всех $x' \in S_\delta(x) \setminus \Gamma(x)$.

Из (22), (23) вытекает, что для любого $x \in \Omega$ при соответствующем выборе числа $\delta > 0$ множество $\Omega_\delta(x)$ обладает свойством абсолютного сектора, а именно: траектория любого решения с начальным условием $x(0) \in \Omega_\delta(x)$ остается в $\Omega_\delta(x)$ для всех $t \geq 0$, при которых $x(t) \in S_\delta(x)$.

О п р е д е л е н и е . *Множество $\Omega_\delta(x)$ будем называть Γ – сектором с вершиной x и радиусом δ (при этом имея ввиду, что для числа $\delta > 0$ выполняется условие (23)).* Для случая $\Gamma(x) = R^n$ радиусом считается произвольное положительное число.

Рассмотрим компактное множество $M \subset \Omega$, удовлетворяющее для каждого $x \in M$ условию

$$M \subset \Gamma(x). \tag{24}$$

Для произвольного числа $\beta > 0$ обозначим $M^\beta @ \{x' \in R^n : d(x', A) < \beta\}$.

Если V – вещественнозначная функция, определенная в некоторой окрестности множества M, и γ – число, то $E(V < \gamma) @ \{x : V(x) < \gamma\}$. Аналогично определяется множество $E(V = \gamma)$.

Т е о р е м а 2 .3.1. *Пусть в некоторой окрестности M^ρ, $\rho > 0$, множества M определена неотрицательная локально липшицевая функция $V(x)$ со свойствами:*

1) $V(x) = 0 \Leftrightarrow x \in M$;

2) для любого Γ – сектора $\Omega_\delta(x)$ с вершиной $x \in M$ и радиусом $\delta < \rho$ выполняется $D^{*+}V(x') \leq 0$ для всех $x' \in \Omega_\delta(x)$.

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$ существуют $\delta > 0$ и конечное покрытие множества M Γ – секторами $\Omega_{\delta_i}(x_i)$, $x_i \in M$, $i = 1, \ldots, m$, такие, что любое решение $x(t)$ с начальным условием $x(0) \in M^\delta$ определено для всех $t \geq 0$, удовлетворяет условию $x(t) \in M^\varepsilon$ для всех $t \geq 0$ и

$$\forall t \geq \tau,\ \ x(t) \in \left\{\bigcup \Omega_{\delta_i}(x_i) : i \in (1, \ldots, n)\right\} \tag{25}$$

В пределах Γ – сектора $\Omega_\delta(x)$ поведение траекторий уравнения (20) может существенно упрощаться, что и позволяет более эффективно исследовать знакоопределенность производной функции V .

2.4. Асимптотическая устойчивость и неустойчивость.

Отметим, что в теореме 2.3.1 утверждается не только устойчивость множества M , но выполнение условия (25), из которого вытекает, что функция $V(x(t))$ является невозрастающей для всех $t \geq \tau$ вдоль любого решения $x(t)$ с начальным условием $x(0) \in M^\delta$. Последнее вместе с принципом инвариантности может быть использовано для исследования асимптотической устойчивости множества M .

Т е о р е м а 2.4.1. *Пусть выполняются условия теоремы 2.3.1 и, дополнительно,* $D^{*+}V(x') < 0$ *для всех* $x' \in \Omega_\delta(x) \setminus M$. *Тогда* M *асимптотически устойчиво (т.е.* M *устойчиво и* $d(x(t), M) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *для любого решения* $x(t)$ *с начальным значением* $x(0) \in M^\delta$ *).*

Т е о р е м а 2 . 4 . 2 . *Пусть выполняются условия теоремы 2.4.1 и, дополнительно, множество* $E(D^{*+}V = 0) \bigcap M^\rho$ *не содержит замкнутых полуинвариантных множеств, непересекающихся с* M *и принадлежащих какому-либо покрытию множества* M Γ *– секторами. Тогда множество* M *асимптотически устойчиво.*

Если же $\Gamma(0) \neq \{0\}$ *и условие 2 теоремы 3.2.1. заменить на*

2') для любого Γ *– сектора* $\Omega_\delta(x)$ *с вершиной* $x \in M$ *и радиусом* $\delta < \rho$ *выполняется* $D^{*+}V(x') \geq 0$ *для всех* $x' \in \Omega_\delta(x)$, *то при том же самом дополнительном предположении множество* M *неустойчиво.*

3 УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ СКОЛЬЖЕНИЯ

3.1. Разрешимость уравнений движения относительно обобщенных ускорений.

Условия разрешимости уравнений движения относительно ускорений определяются методами исследований. В данной работе в основу разрешимости уравнений движения относительно ускорений положен принцип сжимающих отображений. Этот метод предполагает наличие определенных свойств, которых нет в уравнениях (8): из определения сил трения $Q^T(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$ по формуле (12) не вытекает даже их непрерывность по переменной $\ddot{q}$.

Для преодоления возникающих трудностей вводится в рассмотрение новая система уравнений, близкая по своей структуре к исходным уравнениям движения и называемая в дальнейшем *уравнениями динамики.* Эти уравнения, вообще говоря, различаются с исходными уравнениями (8), но, тем не менее, при определенных условиях они определяют одни и те же уравнения в явном виде и поэтому имеют одни и те же решения. Обозначим

$$\mathrm{N}(\dot{q}) @ \left\{ s \in (1, \dots, k_*) : \dot{q}^s = 0 \right\}$$

$$\mathrm{N}_0(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) @ \left\{ s \in N(\dot{q}) : \left| Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}) \right| \le f_s(t, q^s, 0) \left| N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \right| \right\}$$

и запишем систему уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{si}(t,q)\ddot{q}^i = Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}) + g_s(t,q,\dot{q}) + Q_s^A(t,q,\dot{q}), \\ \qquad\qquad s \in \mathrm{N}(t,q,\dot{q},\ddot{q}), \\ \sum\limits_{i=1}^{k} a_{si}(t,q)\ddot{q}^i = f_s(t,q^s,0)\left| N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q}) \right| sgn\, Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}) + \\ \qquad\qquad + g_s(t,q,\dot{q}) + Q_s^A(t,q,\dot{q}),\ s \in \mathrm{N}(\dot{q}) \setminus \mathrm{N}_0(t,q,\dot{q},\ddot{q}), \\ \sum\limits_{i=1}^{k} a_{si}(t,q)\ddot{q}^i = f_s(t,q^s,\dot{q}^s)\left| N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q}) \right| sgn\, \dot{q}^s + \\ \qquad\qquad + g_s(t,q,\dot{q}) + Q_s^A(t,q,\dot{q}),\ s \in (1, \dots, k_*) \setminus \mathrm{N}(\dot{q}), \\ \sum\limits_{i=1}^{k} a_{si}(t,q)\ddot{q}^i = g_s(t,q^s,\dot{q}) + Q_s^A(t,q,\dot{q}),\ s = k_* + 1, \dots, k. \end{cases} \tag{26}$$

Л е м м а 3 .1.1. *Если для всех* $s \in \mathrm{N}(\dot{q}) \setminus \mathrm{N}_0(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$, $(t,q,\dot{q},\ddot{q}) \in \Omega \times R^k$*, таких, что* $\left| N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q}) \right| \ne 0$ *выполняется неравенство*

$$f_s(t,q,0)\left| \frac{\partial \left| N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \right|}{\partial \ddot{q}^s} \right| < a_{ss}(t, q), \tag{27}$$

то уравнение движения (8) с силами трения (12) эквивалентно системе уравнений (26) (т.е. их решения в том или ином смысле совпадают).

В отличие от уравнения (8), правые части уравнений (26) непрерывны по $\ddot{q}$ при любых фиксированных $(t, q, \dot{q}) \in \Omega$.

Пусть $\left[A(t, q)\right](k_*)$ – подматрица матрицы $A(t, q)$, полученная из нее вычеркиванием первых k_* строк и столбцов. Как и $A(t, q)$ $\left[A(t, q)\right](k_*)$ – положительно определенная и, следовательно, невырожденная матрица. Через $\left[\tilde{a}_{k_*+i,\, k_*+j}\right]_1^{k-k_*}$ обозначается матрица, обратную к $\left[A(t, q)\right](k_*)$. Рассмотрим неравенства

$$\left| a_{s\nu}\gamma_{s\nu} - f_s \frac{\partial |N_s|}{\partial \ddot{x}^{\nu}} e_s + \sum_{j=k_*+1}^{k} \left(a_{sj} - f_s \frac{\partial |N_s|}{\partial \ddot{x}^{j}} e_s \right) \sum_{i=k_*+1}^{k} \tilde{a}_{ij}\, a_{i\nu} \right| < \frac{a_{ss}}{k_*} \qquad (28)$$

для всех $s, \nu = 1, \ldots, k_*$ в каждой точке $\left(t, q, \dot{q}, \ddot{q}^*\right) \in \Omega \times R^{k_*}$ такой, что $|N_s| \neq 0$, где e_s может принимать значения $+1$ или -1 и $\gamma_{s\nu} = \begin{cases} 0, & s = \nu; \\ 1, & s \neq \nu. \end{cases}$

Так как в рассматриваемой области выполняется $a_{ss}(t, q) > 0$, то неравенства (28) всегда выполняется при достаточно малых функциях f_s и внедиагональных элементов $a_{s\nu}$, матрицы A. Справедлива следующая

Т е о р е м а 3 .1.1. *Пусть выполняются неравенства (28). Тогда уравнения динамики (26) однозначно разрешимы относительно* $\ddot{q}$ *и могут быть приведены к виду*

$$\ddot{q} = G(t, q, \dot{q}). \qquad (29)$$

Всюду в дальнейшем неравенства (28) предполагаются выполненными (далее будет использоваться усиленный вариант этих неравенств), и считается, что на множестве Ω определена функция G, являющаяся решением уравнений (26) относительно $\ddot{q}$.

3.2. Свойства функции *G*.

Для каждой точки $(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \Omega \times R^k$ обозначим

$$\Gamma = \Gamma(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) @ \Big\{ \dot{q}' \in R^k : \dot{q}^{s\prime} = 0, \text{ если } s \in \mathrm{N}(\dot{q}),\ f_s |N_s| > \left|Q_s^{T0}\right|;$$
$$\dot{q}^{s\prime} Q^{T0} \leq 0, \text{ если } s \in \mathrm{N}(\dot{q}),\ f_s |N_s| \leq \left|Q_s^{T0}\right|,\ |N_s| \neq 0 \Big\}.$$

Если $\mathrm{N}(\dot{q}) = \emptyset$ или $|N_s| = 0$ для всех $s \in \mathrm{N}(\dot{q})$, то считаем $\Gamma @ R^k$.

Положим

$$S_\delta = S_\delta(t, q, \dot{q}) @ \left\{ (t', q', \dot{q}') \in \Omega : t \leq t' < t + \delta,\ \| q - q' \| < \delta,\ \| \dot{q} - \dot{q}' \| < \delta \right\},$$

$$\Omega^0 = \Omega^0(t, q, \dot{q}) @ \left\{ (t', q', \dot{q}') \in \Omega : \dot{q}' \in \Gamma(t, q, \dot{q}, G) \right\},$$

$$\Omega_\delta^0\left(t,\, q,\, \dot q\right) @\Omega^0\left(t,\, q,\, \dot q\right) \bigcap S_\delta\left(t,\, q,\, \dot q\right).$$

Будем говорить, что выполняются *усиленные неравенства* (28), если их правая часть заменена на выражение $\gamma/k_* n$, где $\gamma = \gamma\left(t,\, q,\, \dot q\right)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая $0 < \gamma\left(t,\, q,\, \dot q\right) < 1$ для всех $\left(t,\, q,\, \dot q\right) \in \Omega$; полагаем $n = 1$, если множество $\mathrm{N}\left(\dot q\right) = \emptyset$ или содержит не более двух индексов, и $n = k - 1$, если $\mathrm{N}\left(\dot q\right)$ содержит $k > 2$ индексов.

Т е о р е м а 3 .2.1. *Пусть выполняются усиленные неравенства (*28*). Тогда для каждой точки* $\left(t,\, q,\, \dot q\right) \in \Omega$ *определены множество* $\Gamma\left(t,\, q,\, \dot q,\, G\right)$*, представляющее собой пересечение подпространств и полупространств обобщенных скоростей* $\dot q$*, липшицевая функция* $V_{\left(t,\, q,\, \dot q\right)}\left(\dot q'\right)$ *и (в каждой точке* $\left(t,\, q,\, \dot q\right) \in \Omega$*) выполняются следующие свойства функции* G *:*

1. G *локально ограничена;*
2. G *непрерывна в точке* $\left(t,\, q,\, \dot q\right) \in \Omega$ *вдоль множества* $\Gamma\left(t,\, q,\, \dot q,\, G\right)$*;*
3. $G\left(t,\, q,\, \dot q\right) \in \Gamma\left(t,\, q,\, \dot q,\, G\right)$*;*
4. *Функция* $V_{(t,q,\dot q)}\left(\dot q'\right)$ *неотрицательна, удовлетворяет условию*

$$V_{\left(t,\, q,\, \dot q\right)}\left(\dot q'\right) = 0 \Leftrightarrow \dot q' \in \Gamma\left(t,\, q,\, \dot q,\, G\right)$$

и, если $\Gamma\left(t,\, q,\, \dot q,\, G\right) \neq R^k$*, то существуют числа* $\alpha = \alpha\left(t,\, q,\, \dot q\right) > 0$*,* $\delta = \delta\left(t,\, q,\, \dot q\right) > 0$*, такие, что* $D^+ V_{\left(t,\, q,\, \dot q\right)}\left(\dot q'\right) < -\alpha$ *для всех* $\left(t', q', \dot q'\right) \in S_\delta\left(t,\, q,\, \dot q\right) \setminus \Omega^0\left(t,\, q,\, \dot q\right)$.

4 ПРАВОСТОРОННИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ

4.1. Существование и общие свойства решений.

Обозначим $x = \left(q,\, \dot q\right)$, $f = \left(G_1,\, G_2\right)$, где $G_1\left(t,\, x\right) = \dot q$, $G_2\left(t,\, x\right) = G\left(t,\, q,\, \dot q\right)$. Тогда уравнение (29) запишется в виде уравнения (15), исследованного в части 2 данной работы, а из теоремы 3.2.1 вытекает, него выполнены основные условия из раздела 2.1. Действительно, конус $\Gamma\left(t,\, q,\, \dot q,\, G\right)$ (при условии $\ddot q = G\left(t,\, q,\, \dot q\right)$) определяется, как пересечение подпространств и полупространств обобщенных скоростей $\dot q^s$ (в точках разрыва $\dot q^s = 0$ функции

G). Рассматривая декартово произведение $R^k \times \Gamma(t,\, q,\, \dot{q},\, G)$, получим замкнутый конус $\Gamma(t,\, x)$ (обозначение сохраняется прежним) в пространстве R^{2k}, для которого выполняется очевидное равенство $x + \Gamma(t,\, x) = \Gamma(t,\, x)$ в каждой точке $(t,\, x) \in \Omega$, где $\Omega \subset R^{2k+1}$ – область определения правых частей уравнений динамики (26).

Приведем формулировки основных теорем.

Т е о р е м а 4 .1.1. *Для любого начального состояния* $(t_0,\, q_0,\, \dot{q}_0) \in \Omega$ *существует локальное правостороннее решение задачи (29). Любое правостороннее решение является* R*-правосторонним на своем промежутке определения, т.е. правая производная* $D^+\dot{q}(t)$ *является функцией непрерывной справа.*

Т е о р е м а 4 .1.2. *Равномерный на промежутке* $[t_0,\, t_0 + a)$ *предел* $(q(t),\, \dot{q}(t))$ *последовательности правосторонних решений уравнений динамики (29), удовлетворяющий* $(t,\, q(t),\, \dot{q}(t)) \in \Omega$ *при* $t \in [t_0,\, t_0 + a)$, *является правосторонним решением уравнений динамики.*

Будем говорить, что правостороннее решение $(q(t),\, \dot{q}(t))$, определенное на правом максимальном промежутке существования $[t_0,\, \omega)$, стремится к границе множества Ω, если для любого компактного множества $K \subset \Omega$ существует точка $t_K \in (t_0,\, \omega)$ такая, что $(t,\, q(t),\, \dot{q}(t)) \notin K$ для всех $t \in (t_K,\, \omega)$ (решение покидает компактные подмножества из Ω).

Т е о р е м а 4 .1.3. *Любое правостороннее решение уравнений динамики (29) с начальными условиями* $(t_0,\, q_0,\, \dot{q}_0) \in \Omega$ *может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования* $[t_0,\, \omega)$. *Любое непродолжимое вправо правостороннее решение стремится к границе множества* Ω. *При этом:*

1) если $\Omega = (a,\, b) \times H$ *и* $\omega < b$, *то* $(q(t),\, \dot{q}(t))$ *стремится к границе множества* H*;*

2) если $\Omega = R^1 \times H$, *то либо* $\omega = +\infty$, *либо* $\omega < +\infty$ *и* $(q(t),\, \dot{q}(t))$ *стремится к границе* H*;*

3) если $\Omega = R^1 \times R^{2k}$, *то либо* $\omega = +\infty$, *либо* $\omega < +\infty$ *и* $\| q(t) \| + \| \dot{q}(t) \| \to +\infty$ *при* $t \to \omega - 0$.

4.2. Непрерывная зависимость решений от начальных состояний и параметров.

Пусть функции f_s, $\left|N_s\right|$, g_s^A, Q_s^A, a_{si} зависят также от параметра λ, принимающего значения в некотором метрическом пространстве Λ и являются непрерывными по совокупности аргументов (обозначения для них сохраняются прежние). Матрица $A(t,\, q,\, \lambda)$ предполагается положительно определенной и симметричной в области определения своих переменных.

Рассмотрим задачи Коши

$$\ddot{q} = G(t,\, q,\, \dot{q},\, \lambda),\;\; q(t_0) = q_0,\;\; \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0,\;\; \lambda = \lambda_0, \tag{30}$$

где функция $G(t,\, q,\, \dot{q},\, \lambda)$ определена из уравнений динамики.

Т е о р е м а 4.2.1. *Пусть уравнение (30) обладает правой единственностью, $\left(q(t),\, \dot{q}(t)\right)$ – правостороннее решение задачи (30) с данными $(t_0,\, q_0,\, \dot{q}_0,\, \lambda_0)$ и с правым максимальным интервалом существования $[t_0,\, \omega)$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $t^* \in (t_0,\, \omega)$ существует $\delta > 0$ такое, что любое правостороннее решение $\left(q'(t),\, \dot{q}'(t)\right)$ задачи (30) с начальными состояниями $(t_0',\, q_0',\, \dot{q}_0')$ и значениями λ', удовлетворяющими условиям*

$$\| q_0' - q_0 \| < \delta, \quad \| q' - \dot{q}_0 \| < \delta, \quad t_0 - \delta < t_0' \le t_0, \quad d(\lambda',\, \lambda_0) < \delta,$$

может быть продолжено на правый максимальный интервал существования $[t_0',\, \omega')$, $\omega' > t^*$ и (для продолжения $\left(q'(t),\, \dot{q}'(t)\right)$ выполняется

$$\left\| q'(t) - q(t) \right\| < \varepsilon, \quad \left\| \dot{q}'(t) - \dot{q}(t) \right\| < \varepsilon$$

при всех $t \in \left[t_0,\, t^*\right]$.

С л е д с т в и е 4.2.1. *Пусть уравнение (30) обладает правой единственностью, $\lambda_n \to \lambda_0$, $(t_{n0},\, q_{n0},\, \dot{q}_{n0}) \to (t_0,\, q_0,\, \dot{q}_0)$ $t_{n0} \le t_0$, и $\left(q'(t),\, \dot{q}'(t)\right)$ – правостороннее решение задачи (30) с данными $(t_0,\, q_0,\, \dot{q}_0,\, \lambda_0)$, определенное на правом максимальном интервале существования $[t_0,\, \omega)$. Тогда для любого $t^* \in (t_0,\, \omega)$ на отрезке $\left[t_0,\, t^*\right]$, начиная с некоторого n определена и равномерно сходится к $\left(q(t),\, \dot{q}(t)\right)$ последовательность правосторонних решений $\left(q^n(t),\, \dot{q}^n(t)\right)$ уравнения (30) с данными $(t_0,\, q_{n0},\, \dot{q}_{n0},\, \lambda_n)$.*

Без предположения о правой единственности для уравнений динамики могут быть сформулированы теоремы о полунепрерывной сверху зависимости решений от начальных состояний и параметров системы.

Замечание. Одно из основных направлений теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью (к которым относятся и исследуемые уравнения динамики систем с трением) связано с представлением их в виде дифференциальных включений. Если бы переход к дифференциальному включению не утрачивал точности постановки исходной задачи, то можно было бы автоматически переносить на системы с трением известные факты из теории дифференциальных включений, хорошо развитой в настоящее время. Например, распространить на уравнения динамики систем с трением теорему Кнезера о связности множества решений, известную для дифференциальных включений. В том случае, когда нормальные реакции не зависят от обобщенных ускорений это можно сделать. Множества решений Каратеодори уравнений динамики систем с трением и дифференциального включения, образованного простейшим выпуклым доопределением в смысле А.Ф. Филиппова [32] правых частей уравнений динамики в точках разрыва, совпадают. Любое решение дифференциального включения является правосторонним.

4.3. Пример Пэнлеве.

Вернемся к примеру П. Пэнлеве и запишем для него условия разрешимости (28) из раздела 2.1. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} 2\ddot{x} - r\sin\theta\,\ddot{\theta} = r\dot{\theta}^2\cos\theta + Q_1^T \\ -r\sin\theta\,\ddot{x} + r^2\ddot{\theta} = rg\cos\theta \end{cases} \tag{31}$$

Модуль нормальной реакции и сила трения покоя:

$$\left| N_1\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right) \right| = \left| r\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) - 2g \right|,$$

$$Q_1^{T0}\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right) = -r\sin\theta\,\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2\cos\theta.$$

В общем случае силы трения имеют вид:

$$Q_1^T\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right) = \begin{cases} Q_1^{T0}(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}), \ \text{если} \ \dot{x} = 0 \ \text{и} \\ \qquad\qquad \left| Q_1^{T0}\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right) \right| \le f \left| N_1\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right) \right|; \\ f\left| N_1\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right) \right| sgn\, Q_1^{T0}\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right), \ \text{если} \ \dot{x} = 0 \ \text{и} \\ \qquad\qquad \left| Q_1^{T0}\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right) \right| > f \left| N_1\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right) \right|; \\ -f\left| N_1\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right) \right| sgn\, \dot{x}, \ \text{если} \ \dot{x} \ne 0. \end{cases} \tag{32}$$

где $f > 0$ – коэффициент трения (константа). Так как $\left| N_1\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right) \right|$ не зависит от $\ddot{x}$ то уравнения динамики (вида (26)) в данном случае совпадают с уравнениями движения (31) с доопределением сил трения по формуле (32).

Рассмотрим неравенства (28) применительно к уравнениям (31). Здесь $k = 2$,

$k_* = 1$, $\nu = 1$, $\tilde{a}_{22} = 1/r^2$. Множества

$$\mathrm{N} = \begin{cases} \{1\}, & \text{если } \dot{x} = 0 \\ \emptyset, & \text{если } \dot{x} \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{N}_0 = \begin{cases} \{1\}, \text{ если } \dot{x} = 0, & \left| Q_1^{T0} \right| \leq f \left| N_1 \right| \\ \emptyset, \quad \text{если } \left(\dot{x} \neq 0 \right) \vee \left(\dot{x} = 0, \left| Q_1^{T0} \right| > f \left| N_1 \right| \right) \end{cases}$$

Так как $\partial_{\ddot{\theta}} \left| N_1 \right| = r \cos\theta \, sgn N_1$, если $N_1 \neq 0$, то формула (28) имеет вид неравенства $sin^2\theta + f \left| \cos\theta \, \sin\theta \right| < 2$ или, эквивалентно,

$$f \left| \sin\theta \cos\theta \right| < 1 + \cos^2\theta \,. \tag{33}$$

При выполнении неравенства (33) уравнения (31) однозначно разрешимы относительно ускорений и поэтому избавлены от противоречивости с законами трения Кулона, на которую указал П. Пэнлеве. Здесь уместно заметить, что для угла $\theta_0 \in \left(0, \pi/2\right)$ и коэффициента трения f, удовлетворяющих неравенству

$$f \sin\theta_0 \cos\theta_0 > 1 + \cos^2\theta \,, \tag{34}$$

для определенных начальных состояний либо никакое движение несовместимо с принятыми законами трения, либо одинаково допустимы сразу два движения. Неравенства (33) и (34) согласуются с анализом примера П. Пэнлеве, проведенным в [18]. Легко проверить, что неравенство (33) выполняется для любых $\theta \in \left[0, 2\pi\right]$, если коэффициент трения f не превышает величины, приблизительно равной 2,8.

5 ПРИТЯЖЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ МНОЖЕСТВА ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ

5.1. Притяжение для автономных систем.

Исследуются вопросы притяжения множества положений равновесия системы (8) под действием потенциальных, диссипативных, гироскопических сил и сил трения скольжения в автономном случае. Здесь будет предложена некоторая общая схема исследования притяжения для указанной механической системы, которая затем иллюстрируется примером.

Итак, рассматриваются уравнения движения механической системы (8) при условии, что кинетическая энергия и силы, действующие на систему, не зависят от времени. Здесь, как и ранее, предполагаем, что кинетическая энергия системы представляет сумму $T_a = T + T_1 + T_0$ положительно определенной квадратичной формы T обобщенных скоростей с симметричной, положительно определенной матрицей $A(q)=\left[a_{ij}(q)\right]_1^k$, линейной формы обобщенных скоростей $T_1=\sum_{i=1}^{k} a_i(q)\dot{q}^i$ и функции $T_0(q)$. Предположим далее, что

$$Q_s^A(q,\,\dot{q}) = D_s(q,\,\dot{q}) + K_s(q),$$

и обозначим

$$\Gamma_s(q,\dot{q}) @ \frac{\partial T_1}{\partial q^s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}^s} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial a_j}{\partial q^s} - \frac{\partial a_s}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j, \quad Q_s^e(q) \overset{\Delta}{=} \frac{\partial T_0}{\partial q^s},$$

где $K_s(q) = -\partial\Pi/\partial q^s$, $\Pi(q)$ – потенциальная энергия системы, $D_s(q,\,\dot{q})$ – диссипативные силы, $\Gamma_s(q,\,\dot{q})$ – гироскопические силы с условиями $D_s(q,\,0)\equiv 0$, $\Gamma_s(q,\,0)\equiv 0$; $Q_s^e(q)$ – обобщенные переносные силы инерции $(s=1,\,\ldots,\,k)$. Тогда система исходная система записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = D_i + \Gamma_i + K_i + Q_i^e + Q_i^T, \quad i=1,\,\ldots,\,k. \tag{35}$$

Положим $V_0 @ \Pi + T - T_0$. Умножая уравнения (35) на $\dot{q}^i$ и затем складывая их, получаем

$$D^+V_0(q,\,\dot{q}) = -\sum_{i=1}^{k_*} f_i\,|\,N_i\,||\,\dot{q}^i\,| + \sum_{i=1}^{k} D_i(q,\,\dot{q})\dot{q}^i\ (\le 0) \tag{36}$$

Пусть $J\subset(1,\,\ldots,\,k_*)$. Обозначим

$$w_J(q,\,\dot{q}) = \sum_{i\in J} f_i\,|\,N_i\,||\,\dot{q}^i\,|$$

$$H_J = \left\{(q,\,\dot{q}) : \dot{q}^i = 0,\ i\in J\right\},$$

$$M_J = \left\{(q,\,\dot{q}) : \dot{q}^i = 0,\ f_i\,|\,N_i\,| \ge |\,Q_i^{T0}\,|,\ i\in J\right\},$$

$$\begin{aligned} M = \Big\{(q,0) : f_i\left|\,N_i\,\right| \ge \left|\,K_i + Q_i^e\,\right|,\ i=1,\,\ldots,\,k_*; \\ K_i + Q_i^e = 0,\ i = k_*+1,\,\ldots,\,k\Big\} \end{aligned} \tag{37}$$

Очевидно, если $J'\subset J$, то $w_{J'} \le w_J \le -D^+V_0$, $H_J \subset H_{J'}$, $M_J \subset M_{J'}$ и всегда $M \subset M_J \subset H_J \subset E\,(w_J = 0)$.

Множество M, определенное равенством (37), представляет собой множество положений равновесия для уравнений (35). Множества H_j и M замкнуты.

Так же как и ранее полагаем

$$N(\dot{q}) = \left\{ i \in (1, \ldots, k_*) : \dot{q}^i = 0 \right\}.$$

Легко проверить, что

$$(q, \dot{q}) \in H_J \Leftrightarrow J \subset N(\dot{q})$$

и

$$\left((q, \dot{q}) \in E(w_J = 0) \setminus H_J\right) \Leftrightarrow \left(J \setminus N(\dot{q}) \neq \emptyset\right) \wedge \left(\forall i \in J \setminus N(\dot{q}),\ \left|N_i\right| = 0\right) \quad (38)$$

Непосредственно из сделанных предположений и теоремы 2.2.1 вытекает, что для любого решения $z(t) = \left(q(t), \dot{q}(t)\right)$ уравнения (35) и множества $J \subset (1, \ldots, k_*)$ выполняется включение

$$\Lambda^+(z) \subset E(w_J = 0) \quad (39)$$

Т е о р е м а 5 . 1 . 1 . *Пусть для некоторого множества* $J \subset (1, \ldots, k_*)$ *существует конечный набор локально липшицевых функций* $V_i(q, \dot{q})$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *таких, что*

$$\begin{aligned} &\left(J \setminus N(\dot{q}) \neq \emptyset\right) \wedge \left(\forall j \in J \setminus N(\dot{q}),\ \left|N_j\right| = 0\right) \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \left(\exists i \in \left(\overline{1, N}\right), V_i = 0,\ D^{*+}V_i \neq 0\right) \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда $\Lambda^+(z) \subset H_J$ *для любого решения* $z(t)$ *уравнения (35).*

Т е о р е м а 5 .1.2. *Пусть для множества* $J \subset (1, \ldots, k_*)$ *выполняется условие (40). Тогда для любого решения* $z(t)$ *уравнения (35) выполняется*

$$\Lambda^+(z) \subset M_J \quad (41)$$

и при этом:

1) либо $\left\| z(t) \right\| \to \infty$, *либо* $M_J \neq \emptyset$ *и* $z(t)$ *слабо стремится к* M_j;

2) либо решение $z(t)$ *неограничено, либо* $M_J \neq \emptyset$ *и* $z(t)$ *стремится к* M_j.

Т е о р е м а 5 .1.3. *Пусть для множества* $J \subset (1, \ldots, k_*)$ *выполняется условие (40) и диссипация является полной относительно* $\dot{q}^{k_*+1}, \ldots, \dot{q}^k$, *т.е.*

$$\sum_{i=1}^{k} D_i\left(q,\, \dot{q}\right)\dot{q}^i \le -\gamma \sum_{i=k_*+1}^{k} \dot{q}^{i2} \tag{42}$$

при некотором $\gamma > 0$. *Тогда для любого решения* $z\left(t\right)$ *уравнения (35) выполняется включение*

$$\Lambda^+\left(z\right) \subset M \tag{43}$$

При этом:

1) либо $\left\| z\left(t\right) \right\| \to \infty$, *либо* $M \ne \emptyset$ *и* $z\left(t\right)$ *слабо стремится к* M *;*

2) либо решение $z\left(t\right)$ *не ограничено, либо* $M \ne \emptyset$ *и* $z\left(t\right)$ *стремится к* M *;*

3) $M = \emptyset \Leftrightarrow \left\| z\left(t\right) \right\| \to \infty$ *для любого решения* $z\left(t\right)$ *уравнения (35).*

Отметим, что в рамках предположений теоремы 5.1.3 система (35) дихотомична. Чтобы установить это при условии (42) или при условии $k = k_*$ достаточно проверить соотношение (40), положив $J \subset \left(1,\, \dots,\, k_*\right)$. Последнее означает следующее: для всякого индекса $J \subset \left(1,\, \dots,\, k_*\right)$ такого, что

$$\dot{q}^j \ne 0, \quad \left| N_j \right| = 0 \tag{44}$$

в некоторой точке $\left(q,\, \dot{q}\right)$ должна существовать функция V_i (из данного конечного набора локально липшицевых функций) такая, что

$$V_i\left(q,\, \dot{q}\right) = 0, \;\; D^{*+}V_i\left(q,\, \dot{q}\right) \ne 0 \tag{45}$$

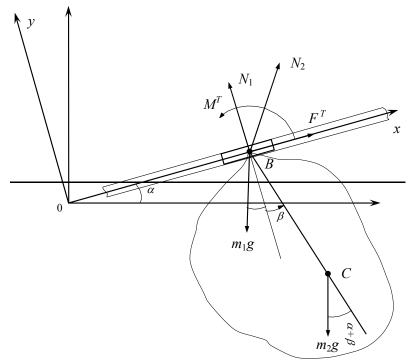
Функции, удовлетворяющие условиям (45), могут быть определены при анализе условий (44). Продемонстрируем это на примере.

5.2. Пример. Маятниковая система с трением в опоре и шарнире.

Рассмотрим плоскую механическую систему, состоящую из поршня B массой m_1, движущегося с трением скольжения по прямолинейной трубке Ox, наклоненной к горизонту на угол $\alpha = const$ $\left(0 \le \alpha < \pi/2\right)$ с координатой $x = q^1$, и тяжелого абсолютно твердого тела, имеющего массу m_2, вращающегося с трением вокруг цилиндрического шарнира, установленного на поршне и имеющего расстояние r от шарнира до центра масс C. J_C – момент инерции относительно центра масс (рис. 1). Угол β отклонения BC от нормали к Ox, направленной вниз, принимается за q^2. Коэффициенты трения f_1 в поршне и f_2 в шарнире считаются постоянными, $m = m_1 + m_2$, $J = J_C + m_2 r^2$.

Уравнения движения системы в форме Лагранжа записываются в виде

$$\begin{cases} m\ddot{x} + m_2 r\cos\beta\,\ddot{\beta} = m_2 r\dot{\beta}^2 \sin\beta - mg\sin\alpha + Q_1^T \\ m_2 r\cos\beta\,\ddot{x} + J\ddot{\beta} = -m_2 gr\sin(\alpha+\beta) + Q_2^T. \end{cases} \tag{46}$$



Рисунак 1. Маятниковая система с трением в опоре и шарннире

Модули нормальных реакций и обобщенные силы трения при относительном равновесии по x и β записываются как

$$|N_1| = \left| m_2 r\left(\ddot{\beta}\sin\beta + \dot{\beta}^2\cos\beta\right) + mg \right|,$$

$$|N_2| = m_2\left[\left(\ddot{x} + r\ddot{\beta}\cos\beta - r\dot{\beta}^2 sin\beta\right)^2 + \left(r\ddot{\beta}\sin\beta + r\dot{\beta}^2\cos\beta + g\right)^2\right]^{1/2},$$

$$Q_1^{T0} = m_2 r\left(\ddot{\beta}\cos\beta - \dot{\beta}^2\sin\beta\right) + mg\sin\alpha \quad \left(\dot{x}=0,\ \ddot{x}=0\right),$$

$$Q_2^{T0} = m_2 r\left(\ddot{x}\cos\beta + g\sin\left(\alpha+\beta\right)\right) \quad \left(\dot{\beta}=0,\ \ddot{\beta}=0\right).$$

Обощенные силы трения определяются для $s = 1,\ 2$ формулой

$$Q_s^T = \begin{cases} Q_s^{T0}, & \text{если } \dot{q}^s = 0,\ \left|Q_s^{T0}\right| \le f_s \left|N_s\right|_{\ddot{q}^s=0} \\ f_s\left|N_s\right| sgn\, Q_s^{T0}, & \text{если } \dot{q}^s = 0,\ \left|Q_s^{T0}\right| > f_s\left|N_s\right|_{\ddot{q}^s=0} \\ -f_s\left|N_s\right| sgn\,\dot{q}^s, & \text{если } \dot{q}^s \ne 0. \end{cases}$$

Достаточным условием выполнения неравенств (28) и (27) будут

$$m_2 r\left(\left|\cos\beta\right| + f_1\left|\sin\beta\right|\right) < m/2,$$
$$m_2\left(r\left|\cos\beta\right| + f_2\right) < J/2,$$
$$m_2 r\, f_2\left(\left|\cos\beta\right| + \left|\sin\beta\right|\right) < J/2.$$

Множество положений равновесия системы имеет вид:

$$M = \left\{\left(q,\, \dot q\right) : \dot x = 0,\ \dot\beta = 0,\ f_1 \ge \mathrm{tg}\alpha,\ \ f_2 \ge r\left|\sin\left(\alpha+\beta\right)\right|\right\}$$

где f_1, f_2 – коэффициенты трения (постоянные величины) соответственно в поршне и шарнире.

За основную функцию Ляпунова, как это следует из общей теоремы 1.3, возьмем энергию системы

$$V_0 = T + \Pi = 1/2\left(m\dot x^2 + 2m_2 r\dot x\dot\beta\cos\beta + J\dot\beta^2\right) +$$
$$+ mgx\sin\alpha + m_2 gr\left(1 - \cos\left(\alpha+\beta\right)\right).$$

Для множества индексов $J_0 = \left\{1,\, 2\right\}$ рассмотрим вспомогательные функции Ляпунова

$$V_1 = \dot x,\ V_2 = \dot\beta,\ V_3 = r\dot\beta^2 + g\cos\left(\alpha+\beta\right),\ V_4 = \sin\left(\alpha+\beta\right)$$

и функцию

$$w = f_1 \,|\, N_1 \,\|\, \dot x \,| + f_2 \,|\, N_2 \,\|\, \dot\beta \,| = -D^+ V_0$$

и покажем, что для них выполняется условие (40).

Имеется три возможности выполнения условия

$$\left(\ J_0 \setminus \mathrm{N}\ \left(\dot q\right) \ne \emptyset\right) \wedge \left(\ \forall j \in J_0 \setminus \mathrm{N}\ \left(\dot q\right),\ \left|N_j\right| = 0\right)$$

а именно:

1) $\mathrm{N}\ \left(\dot q\right) = \left\{2\right\},\ \left|N_1\right| = 0\ \left(\dot\beta = 0,\ \dot x \ne 0\right)$;

2) $\mathrm{N}\ \left(\dot q\right) = \left\{1\right\},\ \left|N_2\right| = 0\ \left(\dot\beta \ne 0,\ \dot x = 0\right)$;

3) $\mathrm{N}\ \left(\dot q\right) = \emptyset,\ \left|N_1\right| = 0,\ \left|N_2\right| = 0\ \left(\dot\beta \ne 0,\ \dot x \ne 0\right)$.

Легко видеть, что функции $\left|N_1\right|$ и $\left|N_2\right|$ одновременно в нуль не обращаются ни при каких условиях, и поэтому случай 3 невозможен.

Рассмотрим случаи 1 и 2.

1) Если $D^+\dot\beta = 0$, то из условий $\left|N_1\right| = 0$, $\dot\beta = 0$ получаем $mg\cos\alpha = 0$, что невозможно (так как $0 \le \alpha < \pi/2$). Следовательно, $V_2 = 0$, $D^+ V_2 \ne 0$. (Так выявляется функция V_2).

2) Если $D^+\dot x \ne 0$, то $V_1 = 0\ \left(\dot x = 0\right)$ и $D^+ V_1 \ne 0$. (Определяется функция

V_1).

Пусть $D^+\dot{x}=0$. Тогда из условия $|N_2|=0$ получаем

$$\begin{aligned} &r\ddot{\beta}\cos\beta - r\dot{\beta}^2\sin\beta + g\sin\alpha = 0 \\ &r\ddot{\beta}\sin\beta + r\dot{\beta}^2\cos\beta + g\cos\alpha = 0 \end{aligned} \qquad (47)$$

Умножая первое из равенств (47) на $\sin\beta$, а второе – на $\cos\beta$, и затем вычитая из второго равенства (47) первое, получаем $r\dot{\beta}^2 + g\cos(\alpha+\beta)=0$. Следовательно, $V_3=0$.

Из второго уравнения (5.17) при условии $D^+\dot{x}=\ddot{x}=0$, $|N_2|=0$ находим $\ddot{\beta}=-m_2 gr\sin(\alpha+\beta)/J$ откуда вытекает $D^+V_3=-\dot{\beta}g\sin(\alpha+\beta)\left(2r^2 m_2/J+1\right)$.

Так как в рассматриваемом случае 2 выполняется $\dot{\beta}\neq 0$, то $D^+V_3\neq 0$, если $\sin(\alpha+\beta)\neq 0$ (выявляется функция V_3).

Если же $\sin(\alpha+\beta)=0$, то $V_4=0$ и $D^+V_4=\cos(\alpha+\beta)\dot{\beta}\neq 0$ (выявляется функция V_4).

Этим исследование условий теоремы 2.3.1 для уравнения (5.17) завершается, что позволяет сделать вывод о дихотомичности системы (это вытекает из теоремы 5.1.3).

Сделаем два замечания:

1) Если $\operatorname{tg}\alpha > f_1$, то $M=\emptyset$ и в системе (5.17) нет ограниченных решений (точнее, все решения бесконечно большие);

2) Если $\operatorname{tg}\alpha = f_1$, то $M\neq\emptyset$, но уравнения (5.17) имеют решение (неограниченное) $x=\dot{x}_0 t + x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, $\beta=\beta_0$ $\dot{\beta}=0$, где $f_2\geq r\left|\sin(\alpha+\beta_0)\right|$, $\dot{x}_0<0$, которое не стремится к M даже слабо.

5.3. Устойчивость множества положений равновесия систем с трением.

Рассматривается система уравнений

$$A(q)\ddot{q} = g(q,\dot{q}) + Q^A(q,\dot{q}) + Q^T(q,\dot{q},\ddot{q}) \qquad (48)$$

Множество всех положений равновесия системы (48) определяется равенством

$$M = \{(q,0) \in \Omega :$$
$$\left| g_s(q,0) + Q_s^A(q,0) \right| \le f_s(q^s,0) \left| N_s(q,0,0) \right|, \quad s = 1,\ldots,k_*; \quad (49)$$
$$g_s(q,0) + Q_s^A(q,0) = 0, \quad s = k_* + 1,\ldots,k\}.$$

Для каждой точки $z = (q, \dot{q}) \in M$ конус $\Gamma(z)$, который определяет Γ-секторы, задается в явном виде и представляет собой множество векторов $(q', \dot{q}')$, таких, что для каждого $s \in (1,\ldots,k_*)$ выполняется:

1) $\dot{q}'^s = 0$, если $f_s(q_s,0)\left|N_s(q,0,0)\right| > \left|g(q,0) + Q^A(q,0)\right|$;

2) $\dot{q}'^s Q_s^{T0} \le 0$, если $f_s(q^s,0)\left|N_s(q,0,0)\right| \le \left|g_s(q,0) + Q_s^A(q,0)\right|$, $\left|N_s(q,0,0)\right| \ne 0$;

Очевидно, для каждого $z \in M$ выполняется включение $M \subset \Gamma(z)$.

Для тех индексов $s \in (1,\ldots,k_*)$, для которых на множестве M выполняется $\left|N_s(q,0,0)\right| \ne 0$ в пределах Γ-сектора соответствующие координаты обобщенных скоростей $\dot{q}^s$ либо обращаются в нуль, либо приобретают определенный знак и, тем самым, определяется или относительное равновесие, или направление движения системы (48) по обобщенной координате $\dot{q}^s$ вблизи множества положений равновесия (как устойчивого, так и неустойчивого). Последнее может ослабить трудности, связанные с исследованием знакоопределенности производной $D^{*+}V$ в силу системы (48), поскольку эта производная задается неявно, а также может оказаться полезным при исследовании не только устойчивости, но и асимптотической устойчивости и неустойчивости с использованием принципа инвариантности.

Отметим также, что для любого положения равновесия $x = (q,0) \in M$, для которого $\left| g_s + Q_s^A \right| < f_s \left| N_s \right|_{\ddot{q}=0}$ для всех $s = 1,\ldots,k_*$ при условии $k = k_*$ в пределах Γ-сектора возможны лишь стационарные движения. Отсюда, вытекает устойчивость (точечная) каждого такого положения равновесия (эти вопросы будут детально исследоваться ниже).

Теорема об устойчивости из раздела 1.3 может быть переформулирована применительно к системе (48) и Γ-секторам, порожденным множествами $\Gamma(z)$, описанными выше, с вершинами $z = (q,0) \in M$. Множества положений равновесия рассматриваемых механических систем имеют свою специфику, с учетом которой приведем еще две теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Некоторое компактное множество M положений равновесия системы (48) будем называть изолированным, если существует число $\rho > 0$ такое, что его окрестность M^{ρ} не содержит положений равновесия, не принадлежащих M.

Теорема 5.3.1. *Пусть* M *– некоторое устойчивое, компактное, изолированное множество положений равновесия уравнения (48). Предположим, что на множестве* M^{ρ}, $\rho > 0$, *определены локально липшицевые функции* $V_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, *такие, что для любого* Γ*-сектора* $\Omega_{\delta}(z)$ *с вершиной* $z \in M$ *и радиусом* $\delta \in (0, \rho)$ *выполняются условия:*

1) $D^{*+}V_i(z') \le 0$ *для всех* $z' \in \Omega_{\delta}(z)$, $i = 1, \ldots, m$;

2) $E \subset \{z : z = (q, \dot{q}), \dot{q} = 0\}$,

где $$E @ \left\{\bigcap E\left(D^{*+}V_i = 0\right) : i = 1, \ldots, m\right\}$$

Тогда M *асимптотически устойчиво.*

Теорема 5.3.2. *Пусть* M *– некоторое компактное, изолированное множество положений равновесия уравнения (48). Предположим, что на множестве* M^{ρ}, $\rho > 0$, *определены локально липшицевые функции* $V_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, *такие, что для любого* Γ*-сектора* $\Omega_{\delta}(z)$ *с вершиной* $z \in M$ *и радиусом* $\delta \in (0, \rho)$ *выполняются условия:*

1) $D^{*+}V_1(z') \ge 0$ *и* $D^{*+}V_i(z') \le 0$ *для всех* $z' \in \Omega_{\delta}(z)$, $i = 1, \ldots, m$;

2) $E \subset \{z : z = (q, \dot{q}), \dot{q} = 0\}$;

3) $M \subset E(V_1 \le 0)$ *и для любого* $\eta > 0$ *существует точка* $z = (q, 0) \in M^{\eta} \setminus M$, *такая, что* $V(z) > 0$.

Тогда множество M *неустойчиво.*

5.4. Пример. Маятниковая система с трением в шарнире и опоре под действием упругой силы.

Рассматривается плоская механическая система состоящая из поршня B массой m_1, движущегося с трением по горизонтальной прямолинейной трубке Ox и рассматриваемого как материальная точка с координатой $x = q^1$, и тяжелого абсолютно твердого тела массы m_2, вращающегося с трением вокруг цилиндрического шарнира, установленного на поршне, имеющего расстояние r от шарнира до центра масс C и момент инерции J_C относительно центра масс (рис.2).

Угол β отклонения BC от нормали к Ox, направленной вниз, принимается за q^2. Предполагается, что вдоль Ox действует сила упругости пружины с коэффициентом упругости c и точкой ненапряженного состояния $x = 0$. Коэффициенты трения f_1 в поршне и f_2 в шарнире считаются постоянными, $m = m_1 + m_2$, $J = J_C + m_2 r^2$.

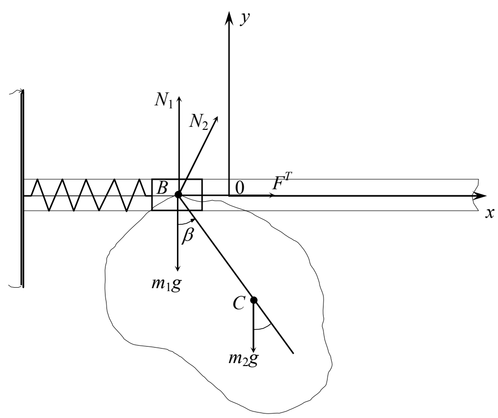


Рисунок 2. Маятниковая система с трением в опоре и шарннире под действием упругой силы

Уравнения движения системы в форме Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} + m_2 r \cos\beta\,\ddot{\beta} = m_2 r \dot{\beta}^2 \sin\beta - cx + Q_1^T \\ m_2 r \cos\beta\,\ddot{x} + J\ddot{\beta} = -m_2 g r \sin\beta + Q_2^T \end{cases} \qquad (50)$$

Обобщенные силы трения определяются по формуле (26) для $s = 1,\ 2$ $s = 1,2$, где

$$|\,N_1\,| = \left|\, m_2 r\left(\ddot{\beta}\sin\beta + \dot{\beta}^2\cos\beta\right) + mg \,\right|,$$

$$|\,N_2\,| = m_2\left[\left(\ddot{x} + r\ddot{\beta}\cos\beta - r\dot{\beta}^2 sin\beta\right)^2 + \left(r\ddot{\beta}\sin\beta + r\dot{\beta}^2\cos\beta + g\right)^2\right]^{1/2},$$

$$Q_1^{T0} = m_2 r\left(\ddot{\beta}\cos\beta - \dot{\beta}^2\sin\beta\right) + cx \ \ \left(\dot{x} = 0,\ \ddot{x} = 0\right),$$

$$Q_2^{T0} = m_2 r\left(\ddot{x}\cos\beta + g\sin\beta\right) \ \ \left(\dot{\beta} = 0,\ \ddot{\beta} = 0\right).$$

Достаточными условиями разрешимости уравнений (50) относительно

$\ddot{q} = (\ddot{x},\ \ddot{\beta})$ также, как и уравнений (5.17), являются неравенства (5.20).

Множество положений равновесия для системы (50) имеет вид

$$M = \left\{(q,\ \dot{q}) : \dot{x} = 0,\ \ \dot{\beta} = 0,\ \ f_1 mg \ge c\,|\,x\,|,\ \ f_2 \ge r\,|\sin\beta\,|\right\}.$$

Будем предполагать, что $f_2/r < 1$. В этом случае M можно рассматривать, как совокупность прямоугольников на плоскости $(x,\ \beta)$. Определим β_{lz} из условий: $\sin\beta_{lz} = f_2/r$, $0 < \beta_{lz} < \pi/2$ и положим $x_{lz} = f_1 mg/c$. Множество $M_{lz}\ @\left\{(q,\ \dot{q}) \in M : |\,x\,| \le x_{lz},\ |\,\beta\,| \le \beta_{lz}\right\}$ будем называть нижней зоной застоя.

Обозначим

$$W_1 = \begin{cases} c\left(x^2 - x_{lz}^2\right)/2, & |\,x\,| > x_{lz}; \\ 0, & |\,x\,| \le x_{lz}; \end{cases}$$

$$W_2 = \begin{cases} m_2 gr\left(\cos\beta_{lz} - \cos\beta\right), & |\,\beta\,| > \beta_{lz}; \\ 0, & |\,\beta\,| \le \beta_{lz}; \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + 2m_2 r\dot{x}\dot{\beta}\cos\beta + J\dot{\beta}^2\right),$$

$$V = T + W_1 + W_2,$$

$$w_1 = f_1\,|\,N_1\,||\,\dot{x}\,|,\ w_2 = f_2\,|\,N_2\,||\,\dot{\beta}\,|.$$

Функция V является положительно определенной относительно множества M_{lz} в некоторой достаточно малой его окрестности.

Опишем множества Γ для точек $(x_0,\ \beta_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{\beta}_0) = (q_0,\ \dot{q}_0) \in M_{lz}$ и значения правой производной D^+V в силу системы (50) на каждом Γ-секторе $\Omega_\delta(q_0,\ \dot{q}_0)$. Вначале заметим, что при условии $(q_0,\ \dot{q}_0) \in M_{lz}$ выполняется $\dot{q}_0 = 0$, $\ddot{q}_0 = 0$ и $|\,N_1\,| = mg$, $|\,N_2\,| = m_2 g$, $|\,Q_1^{T0}\,| = c\,|\,x\,|$, $|\,Q_2^{T0}\,| = m_2 rg\,|\sin\beta\,|$.

Учитывая, что при условии $|\,\beta_0\,| = \beta_{lz}$ знаки β и $\sin\beta$ совпадают в достаточно малой окрестности точки β_0, рассмотрим следующие возможные случаи (значение $D^{+}V$ соответствует точкам $\left(x,\ \dot{x},\ \beta,\ \dot{\beta}\right)=\left(q,\ \dot{q}\right)\in\Omega_\delta\left(q_0,\ \dot{q}_0\right)$):

1) $\left|\,x_0\,\right|<x_{lz}$, $\left|\,\beta_0\,\right|<\beta_{lz}$ ($\left(q_0,\ \dot{q}_0\right)$ – внутренняя точка прямоугольника M_{lz}).Тогда

$$\Gamma\left(q_0,\ \dot{q}_0\right)=\left\{\left(q,\ \dot{q}\right):\dot{x}=0,\ \dot{\beta}=0\right\},\ D^{+}V=0;$$

2) $\left|\,x_0\,\right|<x_{lz}$, $\left|\,\beta_0\,\right|=\beta_{lz}$ или $\left|\,\beta_0\,\right|<\beta_{lz}$, $\left|\,x_0\,\right|=x_{lz}$ (стороны прямоугольника M_{lz} без вершин). Тогда

$$\Gamma\left(q_0,\ \dot{q}_0\right)=\left\{\left(q,\ \dot{q}\right):\dot{x}=0,\ \dot{\beta}\beta_0\le 0\right\},$$

$$D^{+}V=\begin{cases}-w_2, & \left|\,\beta\,\right|>\beta_{lz};\\ -w_2+m_2gr\left|\sin\beta\right|\left|\dot{\beta}\right|, & \left|\,\beta\,\right|\le\beta_{lz};\end{cases}$$

или, соответственно, $\Gamma\left(q_0,\ \dot{q}_0\right)=\left\{\left(q,\ \dot{q}\right):\dot{\beta}=0,\ \dot{x}x_0\le 0\right\}$,

$$D^{+}V=\begin{cases}-w_1, & \left|\,x\,\right|>x_{lz};\\ -w_1+c\left|\,x\,\right|\left|\,\dot{x}\,\right|, & \left|\,x\,\right|\le x_{lz};\end{cases}$$

3) $\left|\,x_0\,\right|=x_{lz}$, $\left|\,\beta_0\,\right|=\beta_{lz}$ (вершины прямоугольника M_{lz}). Тогда

$$\Gamma\left(q_0,\ \dot{q}_0\right)=\left\{\left(q,\ \dot{q}\right):\dot{\beta}\beta_0\le 0,\ \dot{x}x_0\le 0\right\},$$

$$D^{+}V=\begin{cases}-w_1-w_2, & \left|\,\beta\,\right|>\beta_{lz},\ \left|\,x\,\right|>x_{lz};\\ -w_1-w_2+c\left|\,x\,\right|\left|\,\dot{x}\,\right|, & \left|\,x\,\right|\le x_{lz},\ \left|\,\beta\,\right|>\beta_{lz};\\ -w_1-w_2+m_2gr\left|\sin\beta\right|\left|\dot{\beta}\right|, & \left|\,\beta\,\right|\le\beta_{lz},\ \left|\,x\,\right|>x_{lz};\\ -w_1-w_2+c\left|\,x\,\right|\left|\,\dot{x}\,\right|+m_2gr\left|\sin\beta\right|\left|\dot{\beta}\right|, & \left|\,\beta\,\right|\le\beta_{lz},\ \left|\,x\,\right|\le x_{lz};\end{cases}$$

Таким образом, имеем девять возможных видов для множеств Γ и в пределах каждого Γ-сектора обобщенные скорости $\dot{x}$, $\dot{\beta}$ либо обращаются в нуль, либо сохраняют знаки, обратные знакам x_0 и β_0 соответственно.

В случае 1 знакоопределенность $D^{+}V\left(q,\ \dot{q}\right)$ в дальнейшем анализе не нуждается. В случаях 2 и 3 знак $D^{+}V$ определяется соотношениями между значениями функций $f_1|N_1|$ и $c|x|$, $f_2|N_2|$ и $m_2gr|\sin\beta|$ на множестве $\Gamma(q,\dot{q})$. Легко заметить, что условие $D^+V\le 0$ будет выполняться (в пределах Γ-сектора), если для любой точки $(q_0,\dot{q}_0)\in M_{lz}$ вдоль каждого решения уравнений (50) со значениями в Γ-секторе $\Omega_\delta(q_0,\dot{q}_0)$ будет выполняться неравенство

$$D^+\dot{\beta}\sin\beta+\dot{\beta}^2\cos\beta\ge 0. \qquad (51)$$

Действительно, в этом случае из неравенства $|x|\le x_{lz}$ вытекает $f_1|N_1|\ge f_1mg\ge c|x|$ и из неравенства $|\beta|\le\beta_{lz}$ вытекает $f_2|N_2|\ge f_2m_2g\ge m_2gr|\sin\beta|$ откуда, с учетом вида D^+V, и получаем $D^+V\le 0$.

Для того, чтобы доказать (51), предположим противное. Тогда, так как функция $D^+\dot{\beta}(t)$ непрерывна справа (решение является R-правосторонним), то выполняется неравенство

$$D^+\dot{\beta}\sin\beta+\dot{\beta}^2\cos\beta<0 \qquad (52)$$

на некотором малом промежутке $[0,\alpha)$. Интегрируя (52), получаем $\dot{\beta}(t)\sin\beta(t)-\dot{\beta}(0)\sin\beta(0)<0$ для всех $t\in(0,\alpha)$. Если $|\beta_0|<\beta_{lz}$, то $\dot{\beta}(t)=0$ для достаточно малых $t>0$ и, следовательно, выполняется (51). Поэтому (52) будет выполняться лишь при условии $|\beta_0|=\beta_{lz}$. Тогда можно полагать, что $\sin\beta(t)\ne 0$. Пусть для определенности $\sin\beta(t)>0$. Тогда $\dot{\beta}(t)\le 0$ и, следовательно, $\sin\beta(t)$ не возрастающая функция. Поэтому выполняется неравенство $\sin\beta(t)\le\sin\beta(0)$, из которого, с учетом $\dot{\beta}(t)\le 0$, вытекает $\dot{\beta}(0)\sin\beta(t)\ge\dot{\beta}(0)\sin\beta(0)\ge\dot{\beta}(t)\sin\beta(t)$.

Следовательно, $\dot{\beta}(0)\ge\dot{\beta}(t)$, откуда получаем $D^+\dot{\beta}(0)\ge 0$. Но тогда неравенство (52) при $t=0$ не выполняется, что противоречит сделанному предположению.

Случай $\sin\beta(t)<0$ рассматривается аналогично и также приводит к противоречию с (52).

Таким образом, для уравнений (50), множества M_{lz} и функции V выполнены все условия теоремы об устойчивости, в соответствии с которой нижняя зона застоя устойчива.

Для того чтобы изучить асимптотическую устойчивость M_{lz} с использованием теоремы 5.3.1, рассмотрим функции $V_1 = x^2/2$, $V_2 = \beta^2/2$.

Тогда для любых $(q_0, \dot{q}_0) \in M_{lz}$ и Γ-секторов $\Omega_\delta(q_0, \dot{q}_0)$ выполняется

$$D^+V_1 = x\dot{x} \le 0, \quad D^+V_2 = \beta\dot{\beta} \le 0.$$

Если $x_0 = 0$ или $\beta_0 = 0$, то при достаточно малом $\delta > 0$ для всех $(q, \dot{q}) \in \Omega_\delta(q_0, \dot{q}_0)$ выполняется $\dot{x} = 0$ или, соответственно, $\dot{\beta} = 0$. Если же $x_0 \ne 0$ и $\beta_0 \ne 0$, то

$$E\left(D^+V_1 = 0\right) \cap E\left(D^+V_2 = 0\right) = \left\{(q, \dot{q}) : \dot{x} = 0,\ \dot{\beta} = 0\right\}.$$

Таким образом, всегда выполняется

$$\Omega_\delta(q_0, \dot{q}_0) \cap E\left(D^+V_1 = 0\right) \cap E\left(D^+V_2 = 0\right) \subset \left\{(q, \dot{q}) : \dot{x} = 0,\ \dot{\beta} = 0\right\}$$

и, в соответствии с теоремой 3.1, M_{lz} асимптотически устойчиво.

В заключение отметим, использование Γ-секторов позволяет давать наглядные геометрические интерпретации поведения движений вблизи множества M положений равновесия (как устойчивого, так и неустойчивого), поскольку поведение траекторий в пределах Γ-сектора может существенно упрощаться. Для системы (50) фазовым является четырехмерное пространство переменных $(x, \beta, \dot{x}, \dot{\beta})$. Тем не менее, рис. 3 дает достаточно полное представление о поведении траекторий вблизи нижней зоны застоя. Для Γ-секторов с вершинами внутри прямоугольника M_{lz} возможны лишь стационарные движения.

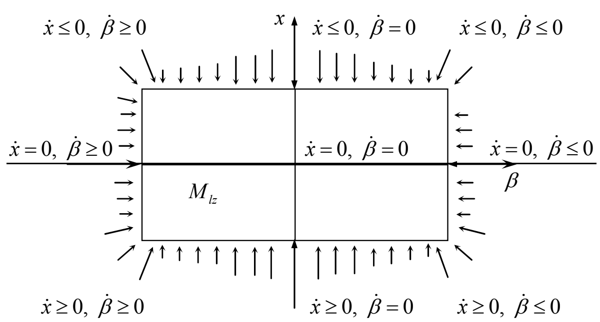


Рисунок 3. Нижная зона застоя

5.5. Точечная устойчивость положений равновесия.

Здесь изучается точечная устойчивость внутренних положений равновесия уравнений динамики, которая может обеспечиваться самой структурой уравнений без дополнительных предположений.

Рассматриваются уравнения динамики (26) в автономном случае. Обозначим

$Q_s(q, \dot{q}) = g_s(q, \dot{q}) + Q_s^A(q, \dot{q})$, $s = 1, \ldots, k$.

Определение. *Положение равновесия* $(q, 0)$, *для которого* $f_s |N_s| > |Q_s|$ *для всех* $s = 1, \ldots, k_*$, *называется внутренним. Множество всех внутренних положений равновесия обозначается* M^0.

Приняты следующие обозначения:

$$\dot{q}^{0*} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k_*}, \dot{q}^{k_*+1}, \ldots, \dot{q}^k), \quad \dot{q}^* = (\dot{q}^{k_*+1}, \ldots, \dot{q}^k).$$

Положив в уравнениях динамики $\ddot{q}^s = 0$, $s = 1, \ldots, k_*$, отбросив первые три группы уравнений и добавив к четвертой группе условия $\dot{q}^s = 0$, $s = 1, \ldots, k_*$, получим соотношения

$$\begin{cases} \dot{q}^s = 0\left(s = 1, \ldots, k_*\right), \\ \sum\limits_{i=k_*+1}^{k} a_{si}(q)\ddot{q}^i = Q_s\left(q, \dot{q}^{0*}\right) \left(s = k_* + 1, \ldots, k\right). \end{cases} \tag{53}$$

Будем рассматривать (53), как систему дифференциальных уравнений с фазовыми переменными в пространстве R^{2k-k_*}, которыми, чтобы не проводить переобозначения и подчеркивать связь с уравнениями динамики, будем считать $(q, \dot{q}^*)$. Положениями равновесия для системы (53) будут точки $(q, 0^*) @ (q^1, \ldots, q^k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-k_*})$, где q удовлетворяет равенствам $Q_s(q, 0) = 0, ((s = k_* + 1, \ldots, k)$.

Множество всех положений равновесия уравнений (53) обозначается M^*. Если $(q_0, 0)$ – положение равновесия уравнений динамики, то $(q_0, 0^*)$ – *соответствующее ему положение равновесия уравнений (53).* Точечная устойчивость положений равновесия $(q_0, 0) \in M$ понимается в обычном смысле.

Определение. *Будем говорить, что положение равновесия* $(q_0, 0) \in M$ *сильно асимптотически устойчиво по переменным* $\dot{q}^i$, $i = 1, \ldots, k_*$, *если для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\tau > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что любое решение* $(q(t), \dot{q}(t))$ *с начальным условием* $(q(0), \dot{q}(0)) \in S_\delta(q_0, 0)$ *существует и удовлетворяет* $(q(t), \dot{q}(t)) \in S_\varepsilon(q_0, 0)$ *для всех* $t \geq 0$ *и* $\dot{q}^i(t) = 0$ *для всех* $t \geq \tau$, $i = 1, \ldots, k_*$.

Т е о р е м а 5 . 5 . 1 . *Для устойчивости внутреннего положения равновесия* $(q_0, 0) \in M^0$ *необходима и достаточна устойчивость соответствующего ему положения равновесия* $(q_0, 0^*) \in M^*$.

С л е д с т в и е 5 . 5 . 1. *Если в уравнениях динамики* $k = k_*$, *то любое внутреннее положение равновесия* $(q_0, 0)$ *сильно асимптотически устойчиво по переменным* $\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^{k_*}$.

Ниже предполагается, что $k = k_*$. Через M^0_{top} и ∂M обозначается топологическая внутренность и граница множества M относительно подпространства $L @ \{(q, \dot{q}) : \dot{q}^s = 0, \ s = 1, \ldots, k\}$.

Т е о р е м а 5 .5.2. *Если* $M^0_{top} \neq \emptyset$ *и* $M^0_{top} \subset M^0$, *то* $M^0_{top} = M^0$ *и любое компактное множество* $K \subset M^0_{top}$ *является устойчивым. При этом для любого* $\tau > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого решения* $z(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ *уравнений динамики с начальным условием* $z(0) \in K^{\delta_0}$ *выполняется* $z(t) \in M^0_{top}$ *для всех* $t \geq \tau$.

Т е о р е м а 5 .5.3. *Пусть множество* $M \subset \Omega$ *компактно,* $M^0_{top} \neq \emptyset$ *и* $M^0_{top} \subset M^0$. *Тогда* $M^0_{top} = M^0$ *и для устойчивости множества* M *необходима и достаточна устойчивость* ∂M.

Для описанного выше примера Пэнлеве множеством положений равновесия будет $M = \{(x, \theta, 0, 0) : \cos\theta = 0\}$. Так как для каждой точки $(x, \theta, 0, 0) \in M$ выполняется $f_1 |N_1| = 2 f_1 g > 0$ и $Q_1^{T0} = 0$, то, в соответствии с принятым определением, все положения равновесия из M являются внутренними. Система (53) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ r\ddot{\theta} = g\cos\theta \end{cases} \tag{54}$$

Для системы (54) множество положений равновесия M^* состоит из точек $(x, \theta, 0)$, для которых $\cos\theta = 0$.

В заключение отметим, что в основе этой статьи лежат публикации авторов [33]-[43] Отметим также, что эти исследования впоследствии развивались в статьях

[44], [45], где изучен более общий класс уравнений движения механических систем с кулоновым трением. Но существования правосторонних решений в упомянутых статьях не доказано, а само решение определяется с использованием некоторой модификации определения решений разрывных систем в смысле А.Ф. Филиппова.

* * *

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проект № 06-01-00247) и ИНТАС-СО РАН (проект № 06-100013-9019)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Painleve P. *Lecons sur le frottement* // Pariis: Hermann. 1895. 111p. (рус. перевод // М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.)

[2] Болотов Е.А. *О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями с трением* // Матем. сборник. 1906. Т. 25. Вып. 4. С. 562-708.

[3] Самсонов В.А. *Динамика тормозной колодки и "удар трением"* // ПММ. 2005. Т. 9. Вып. 6. С. 912-921.

[4] Бутенин Н.В. *Рассмотрение "вырожденных" динамических систем с помощью гипотезы "скачка"* // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 1. С. 3-22.

[5] Фуфаев Н.А. *Динамика системы в примере Пэнлеве–Клейна. О парадоксах Пэнлеве* // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 48-53.

[6] Неймарк Ю.И. *Еще раз о парадоксах Пэнлеве* // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 17-21.

[7] Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. *Парадоксы Пэнлеве и динамика тормозной колодки* // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 366-375.

[8] Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. *Контрасные структуры, предельная динамика и парадокс Пэнлеве* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1507-1515.

[9] Иванов А.П. *О корректности основной задачи динамики в системах с трением* // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 712-716.

[10] Никольский В.В., Смирнов Ю.П. *Динамика систем с многовариантными моделями контактного взаимодействия трущихся тел* // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 51-59.

[11] Никольский В.В., Смирнов Ю.П. *О формах уравнений динамики систем с сухим трением* // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 15-22.

[12] Смирнов Ю.П. *Уравнения движения систем с неидеальными удерживающими связями* // Изв. АН СССР. 1983. № 2. С. 63-71.

[13] Григорян С.С. *Разрешение парадокса сухого трения – парадокса Пэнлеве* // Доклады РАН. 2001. Т. 379. № 1. С. 54-58.

[14] Белокобыльский С.В. *Динамика систем с сухим трением и ее приложения к задачам горной механики* // М.: Машиностроение, 2002.

[15] Ле Суан Ань. *Динамика систем с кулоновым трением (теория и эксперимент)*// С.Петербург, 1999.

[16] Аппель П. *Теоретическая механика. Т. 2.* // М.: Физматгиз, 1960.

[17] Ле Суан Ань *Парадоксы Пэнлеве и законы движения механических систем с кулоновым трением* // ПММ. 1990. Вып. 4. С. 520-529.

[28] Аппель П. *Теоретическая механика. Т. 1* // М.: Физматгиз, 1960.

[19] Лурье А.И. *Аналитическая механика* // М.: Физматгиз, 1961.

[20] Четаев Н.Г. *О некоторых связях с трением* // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 1. С. 35-38.

[21] Румянцев В.В. *О системах с трением* // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 969-977.
[22] Пожарицкий Г.К. *Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением* // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 3. С. 391-406.
[23] Пожарицкий Г.К. *Исчезающие скольжения механических систем с сухим трением* // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 558-563.
[24] Пожарицкий Г.К. *Об устойчивости равновесий для систем с сухим трением* // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 5-14.
[25] Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. *О скачках при трении* // ЖТФ. 1944. Т. 14. Вып. 45. С. 276-282.
[26] Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л. *О движении плоских тел при наличии трения* // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 4. С. 17-28.
[27] Черноусько Ф.Л. *Условия равновесия тела на шероховатой поверхности* // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1988. № 6. С. 6-17.
[28] Фейгин М.И. *Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями* // М.: Наука, 1994.
[29] Никитин Л.В. *Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением* // М.: Московский лицей, 1998.
[30] Сумбатов А.С., Юнин Е.К. *Очерки о трении* // М.: Вычислительный центр РАН, 2000.
[31] Самсонов В.А. *Очерки о механике: некоторые задачи, явления и парадоксы* // Ижевск: НИЦ "`Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
[32] Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью* // М.: Наука, 1985.
[33] Матросов В.М., Финогенко И.А. *О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения* // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 3-13.
[34] Матросов В.М., Финогенко И.А. *О правосторонних решениях дифференциальных уравнений динамики механических систем с трением скольжения* // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 877-886.
[35] Матросов В.М., Финогенко И.А. *О существовании правосторонних решений дифференциальных уравнений динамики механических систем с сухим трением* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 2. С. 185-192.
[36] Матросов В.М., Финогенко И.А. *К теории дифференциальных уравнений, возникающих в динамике систем с трением. 1* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 5. С. 606-614.
[37] Матросов В.М., Финогенко И.А. *К теории дифференциальных уравнений, возникающих в динамике систем с трением. 2* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 769-773.
[38] Матросов В.М., Финогенко И.А. *О притяжении для автономных механических систем с трением скольжения* // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 100-120.
[39] Матросов В.М., Финогенко И.А. *Об устойчивости множества положений равновесия автономных систем с трением скольжения* // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 934-944.
[40] Финогенко И.А. *К теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, возникающих в динамике систем с трением* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 11. 1572 с.
[41] Финогенко И.А. *Теоремы сведения для дифференциальных уравнений, возникающих в динамике систем с тренем* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 1609-1615.

[42] Финогенко И.А. *Об устойчивости множества положений равновесия автономных систем* // Доклады РАН. 1999. Т. 365. № 4.
[43] Финогенко И.А. *О дифференциальных уравнениях, возникающих в динамике систем с сухим трением* // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 8. С. 122-127.
[44] Матросов И.В. *О существовании решений уравнений движения механической системы с сухим трением* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 3. С. 343-351.
[45] Матросов И.В. *О существовании и единственности решений уравнений движения механической системы с сухим трением* // Доклады РАН. 2003. Т. 378. № 2. С. 190-193.

Sent: Thursday, February 14, 2008 11:17 AM